



Resistência dos Materiais

Prof. Carlos Catunda

PARTE 1/3

Material disponível em:

<http://www.cefet-rj.br/index.php/demec-downloads>



Ementa

1. Definições,
2. Conceito de tensão
3. Tensão e deformação
4. Cargas axiais
5. Torção
6. Flexão pura
7. Barras submetidas a carregamento transversal
8. Análise de tensões e deformações.

Parte 1/3

Objetivos Gerais / Objetivos Específicos

1. Compreender os princípios de funcionamento das estruturas submetidas a carregamentos mecânicos diversos.
 - Identificar as estruturas, o seu funcionamento e suas reações quanto a sua operacionalidade.
 - Analisar suas aplicações permitindo o cálculo de parâmetros relevantes.
2. Conhecer os fundamentos conceituais de Resistência de Materiais e sua aplicação nos vários tipos de estruturas simples.
 - Identificar e calcular as tensões e deformações geradas por determinados carregamentos em estruturas simples.
 - Analisar o comportamento das estruturas de trabalho.

Objetivos Gerais / Objetivos Específicos

3. Desenvolver capacidade de selecionar e aplicar esses conceitos em projetos de instalações. Aprender noções de projeto destas estruturas.
 - ❑ Utilizar os modelos matemáticos de Resistência dos Materiais para cálculo dos parâmetros de Engenharia em estudos de casos reais.

Sumário

Capítulo 1 – CÁLCULO DAS REAÇÕES

Capítulo 2 – DIAG. DE FORÇA AXIAL, CORTANTE E DE MOMENTOS

Capítulo 3 – TENSÃO

Capítulo 4 – DEFORMAÇÃO

Capítulo 5 – TORÇÃO

Capítulo 6 - TENSÃO DE FLEXÃO EM VIGAS

Parte 1/3

Capítulo 7 - TENSÃO DE CISALHAMENTO EM VIGAS

Capítulo 8 – TENSÕES COMPOSTAS

Capítulo 9 – TRANSFORMAÇÃO DE TENSÕES

Parte 2/3

Sumário

Capítulo 10 – VASOS DE PRESSÃO

Capítulo 11 – DEFLEXÃO DE VIGAS

Capítulo 12 – MÉTODOS DE ENERGIA

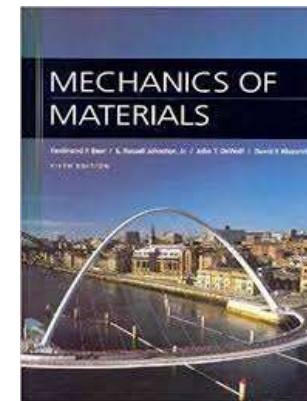
Capítulo 13 – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Capítulo 14 – FLAMBAGEM DE COLUNAS

Parte 3/3

Bibliografia

1. HIBBELER, Russell C. Resistência dos Materiais. 7.ed. Rio de Janeiro: Prentice Hall Brasil, 2010.
2. FERDINAND, P. B.; JOHNSTON JR, E. R.; Resistência dos Materiais, Mc Graw-Hill
3. PEREIRA, J. C., Notas de Aula CURSO DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS, DEMEC-UFSC, 2003



Bibliografia Complementar

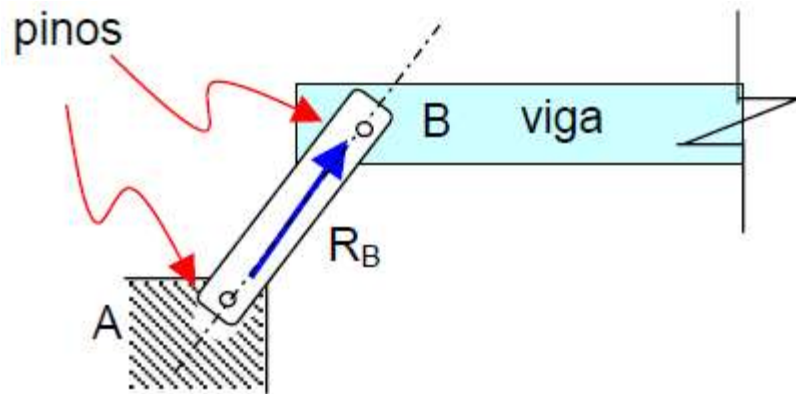
1. BOTELHO, Manoel H.C. Resistência dos Materiais. 2.ed. Rio de Janeiro: Edgard Blucher. 2013. 238p.
2. ASSAN, Aloisio Ernesto. Resistência dos Materiais, V.1. 1.ed. Campinas: Ed. Unicamp. 2010. 456p.
3. PROVENZA, Francesco. Resistência dos Materiais. Rio de Janeiro: Ed. Provenza. 1995.
4. ARRIVABENE, Vladimir. Resistência dos Materiais. Rio de Janeiro: Ed. Makron. 1994.
5. PARETO, Luis. Resistência e Ciência dos Materiais. São Paulo: Hemus. 2003. 182p.

Capítulo 1 – CÁLCULO DAS REAÇÕES

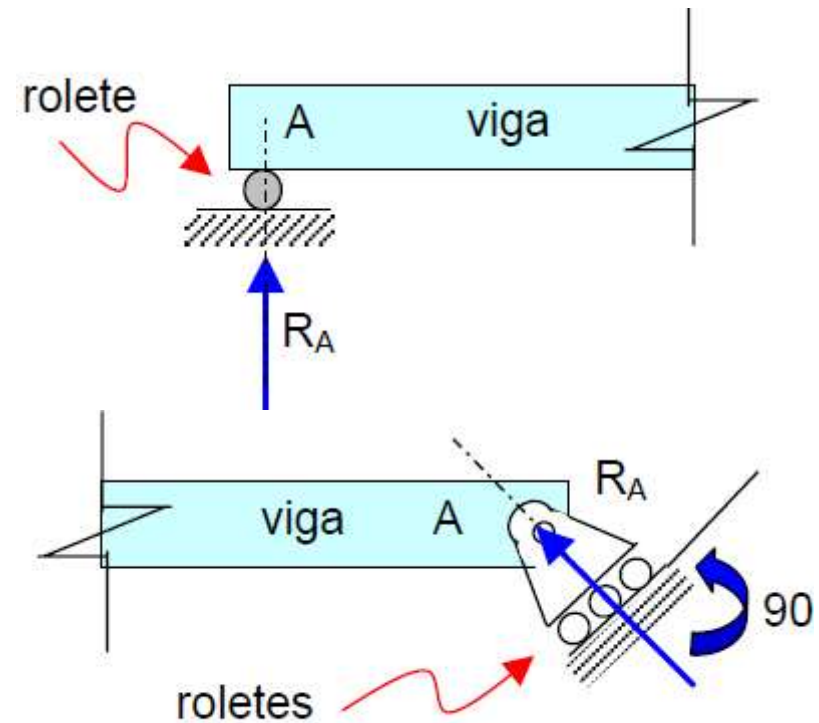
- ≡ 1.1 – Tipos de suportes (ou apoios)
- ≡ 1.2 – Tipos de carregamentos
- ≡ 1.3 – Classificação de vigas
- ≡ 1.4 – Cálculo das reações nas vigas

1.1 Tipos de suportes (ou apoios)

a) Articulação: (Resiste à uma força em apenas uma direção)

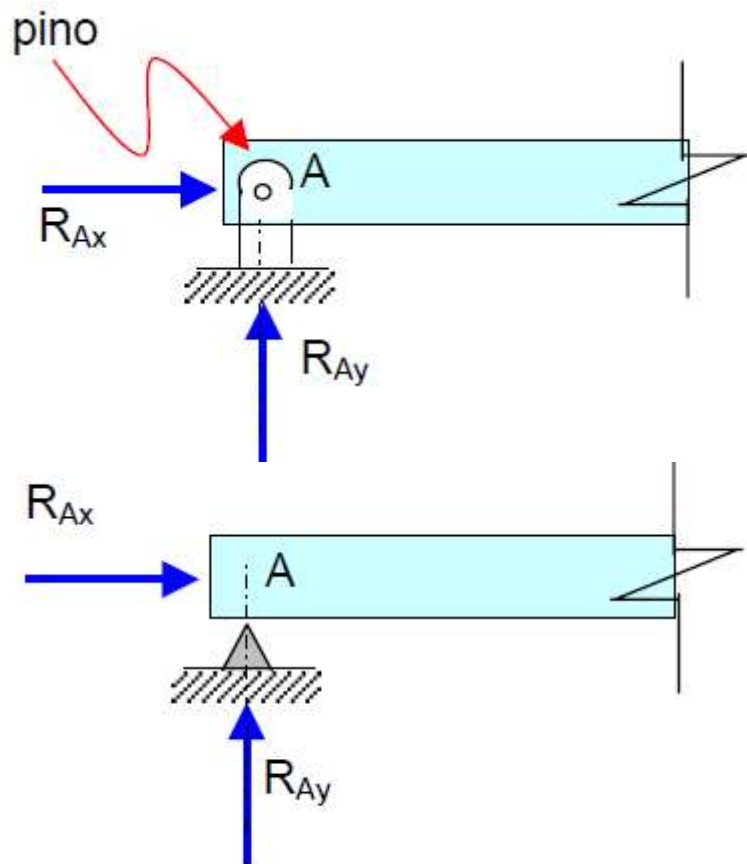


b) Rolete: (Resiste à uma força em apenas uma direção)

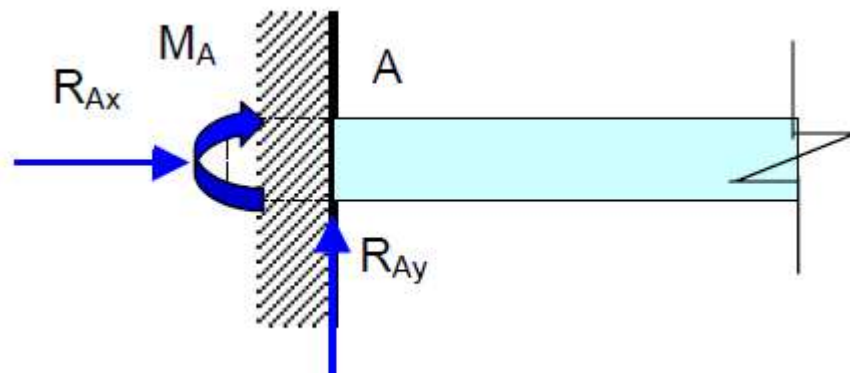


1.1 Tipos de suportes (ou apoios)

c) Pino: (Resiste à uma força que age em qualquer direção)

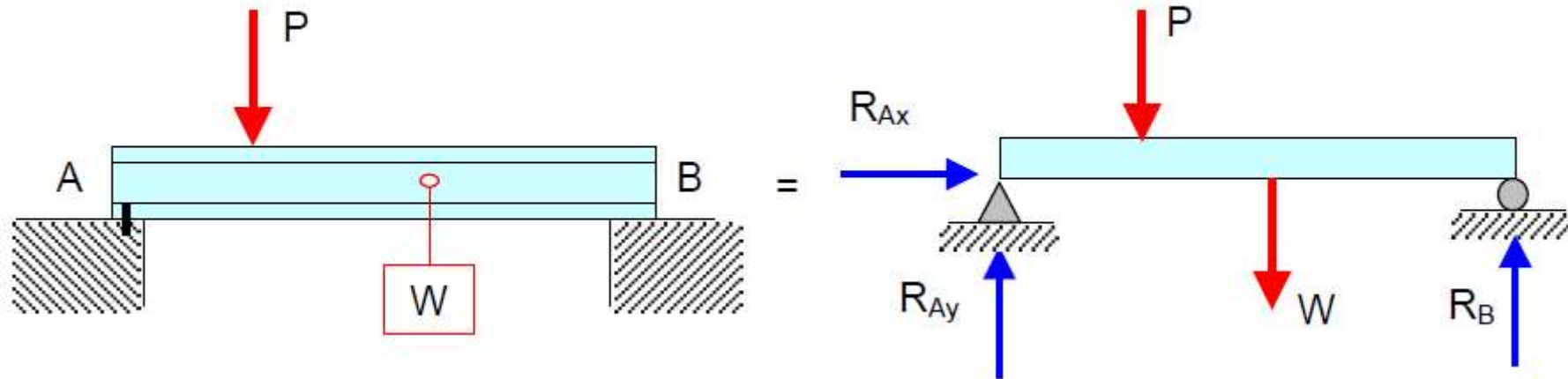


d) Engastamento: (Resiste à uma força que age em qualquer direção e à um momento)



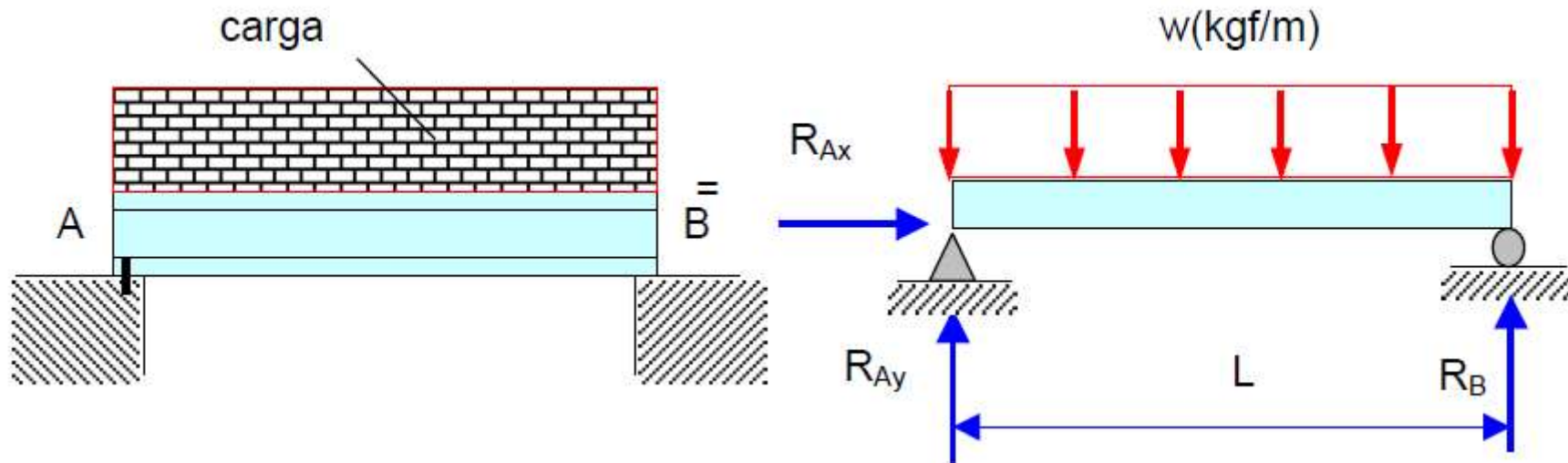
1.2 – Tipos de carregamentos

a) Forças concentradas



1.2 – Tipos de carregamentos

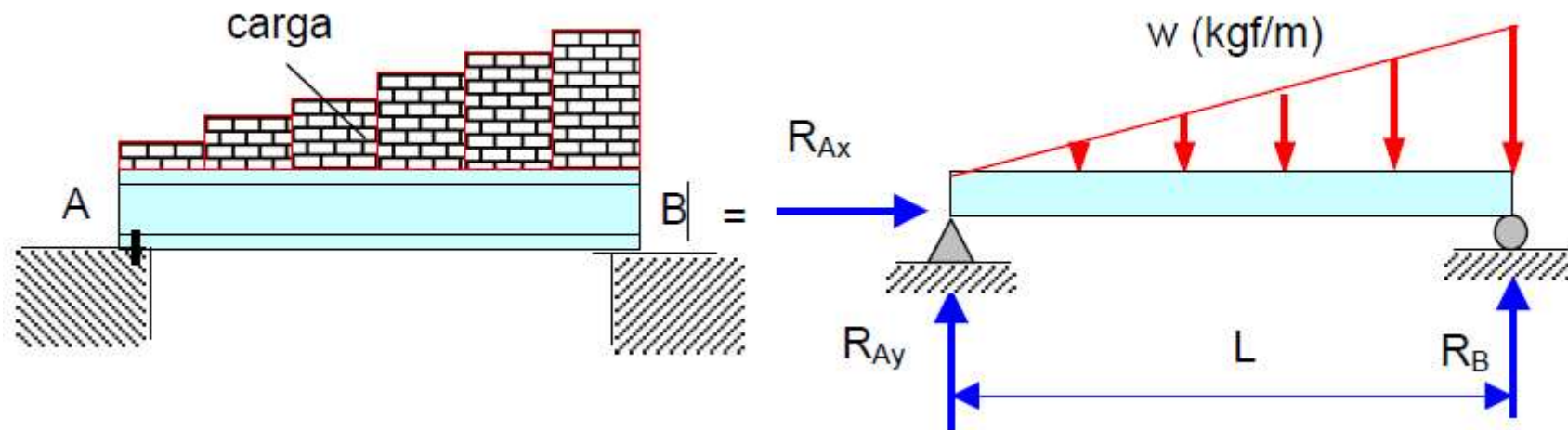
b) Carga uniforme distribuída



Para o cálculo das reações de apoio, a carga uniforme distribuída é substituída por uma **força concentrada** equivalente W igual a área da figura geométrica da carga e que passa pelo seu centróide: **$W = p \cdot L$**

1.2 – Tipos de carregamentos

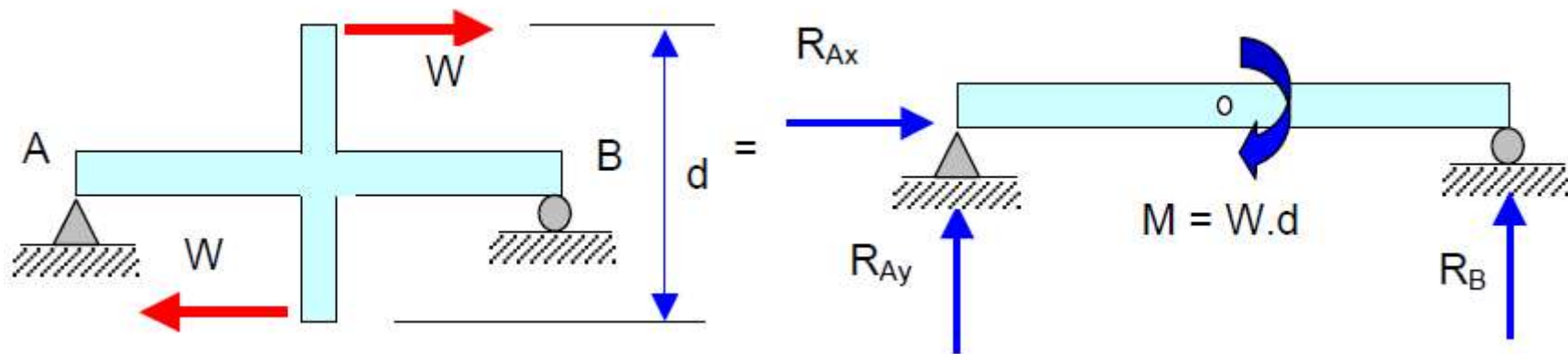
c) Carga uniformemente variável



Para o cálculo das reações de apoio, a carga uniforme variável é substituída por uma **força concentrada** equivalente W igual a área da figura geométrica da carga e que passa pelo seu centróide: **$W = (p \cdot L) / 2$**

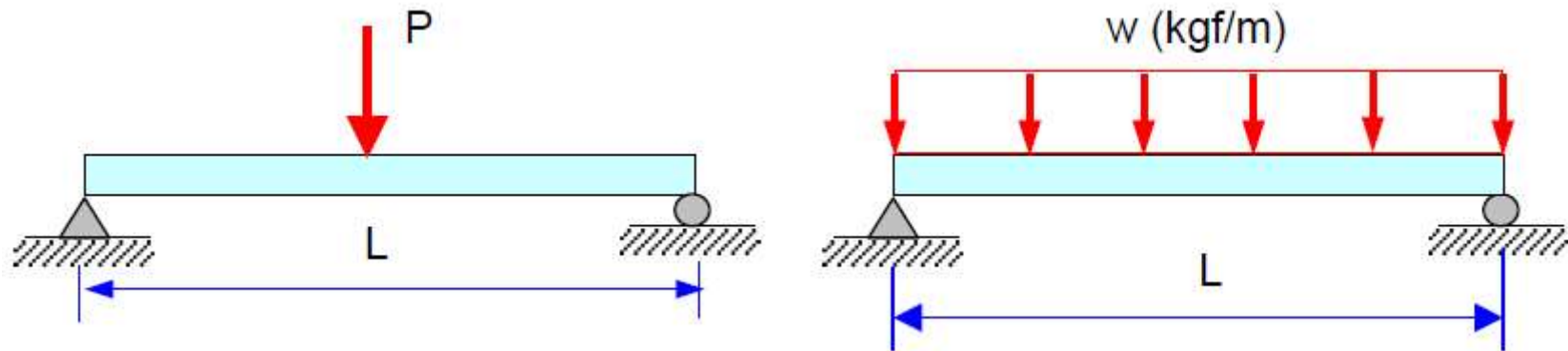
1.2 – Tipos de carregamentos

d) Momento concentrado

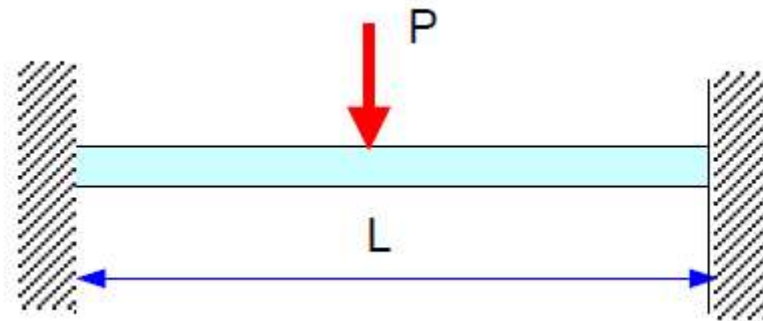


1.3 – Classificação de vigas

a) Simplesmente apoiadas

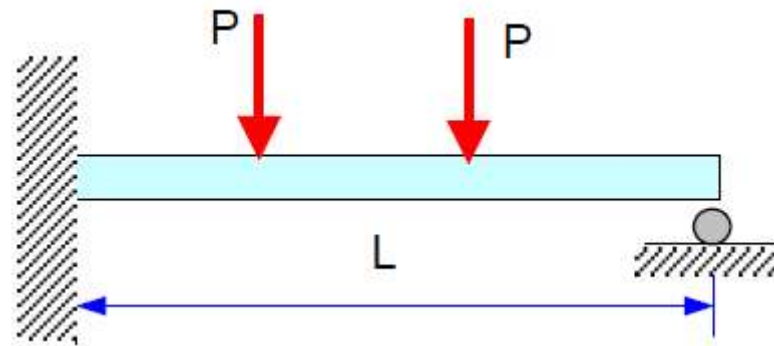


b) Bi-engastada (fixa)

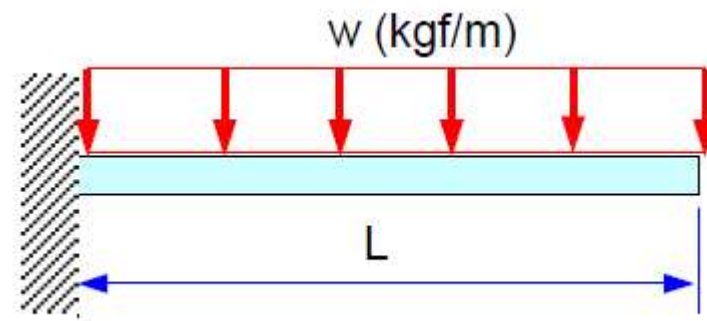


1.3 – Classificação de vigas

c) Engastada- Apoiada

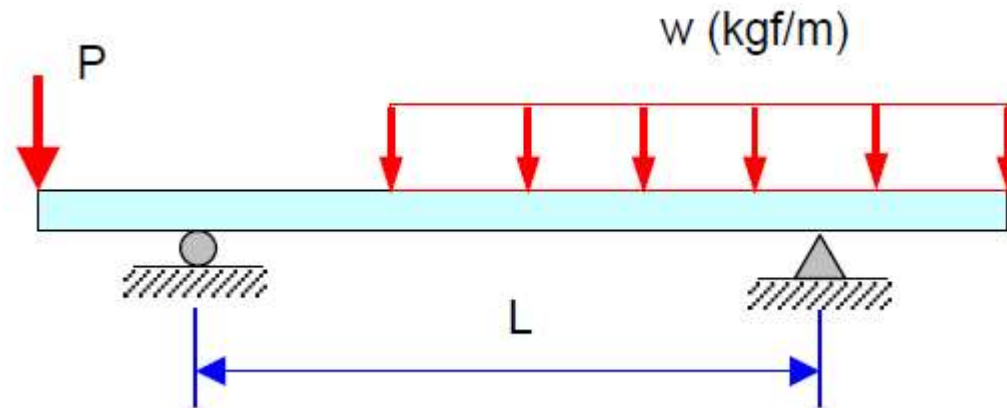


d) Em balanço



1.3 – Classificação de vigas

e) Em balanço nas extremidades



1.4 – Cálculo das reações nas vigas

Equações de equilíbrio estático (forças aplicadas em um plano):

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0 \quad \text{e} \quad \sum M_{A \text{ ou } B} = 0$$

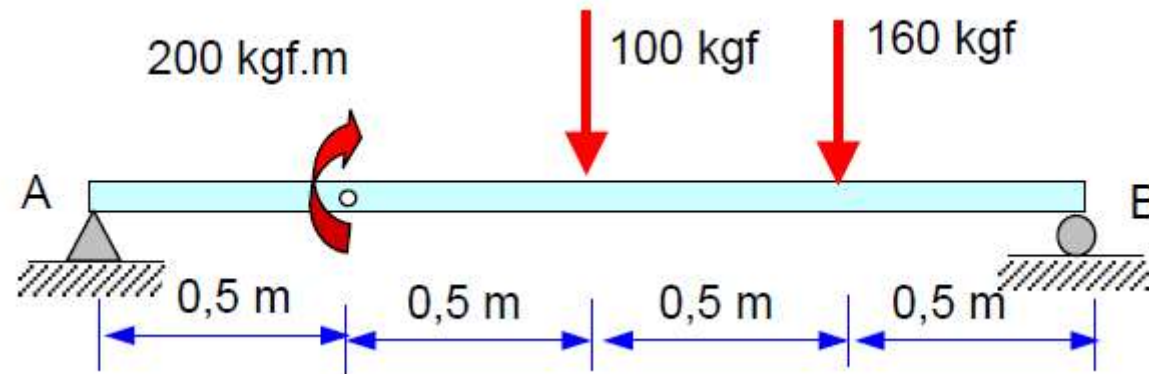
OU

$$\sum F_x = 0, \quad \sum M_A = 0 \quad \text{e} \quad \sum M_B = 0$$



Cálculo das reações nas vigas – Exemplo 1.1

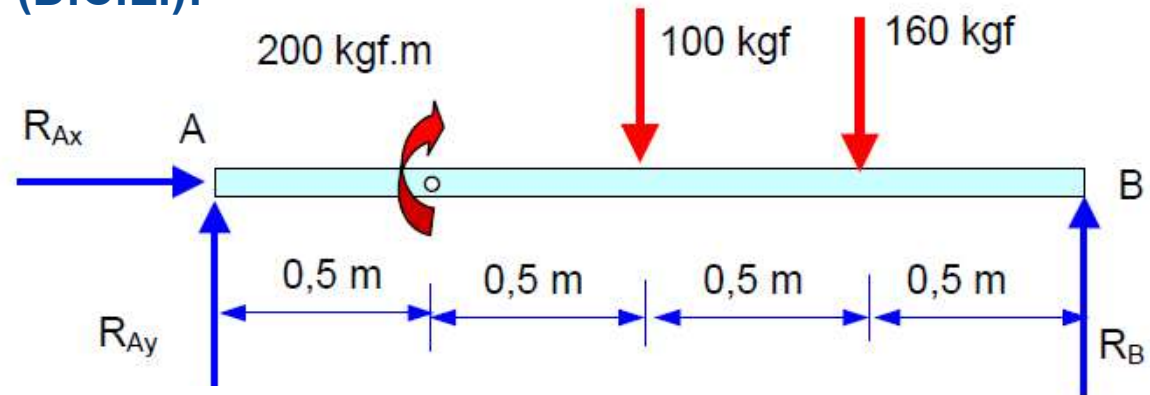
Calcular as reações nos apoios da viga. Desprezar o peso da viga.





Cálculo das reações nas vigas – Exemplo 1.1

Diagrama de corpo livre (D.C.L.):



$$\rightarrow \sum F_x = 0 \rightarrow R_{Ax} = 0$$

$$\curvearrowright \sum M_A = 0, \quad 200 + 100 \cdot 1 + 160 \cdot 1,5 - R_B \cdot 2 = 0 \rightarrow R_B = 270 \text{ kgf}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad R_{Ay} - 100 - 160 + 270 = 0 \rightarrow R_{Ay} = -10 \text{ kgf}$$

Verificação:

$$\curvearrowright \sum M_B = 0 \rightarrow -10 \cdot 2 + 200 - 100 \cdot 1 - 160 \cdot 0,5 = 0 \quad \text{OK}$$



Cálculo das reações nas vigas – Exemplo 1.2

Observação: Nenhum momento é transmitido por uma junta articulada, apenas as forças horizontais e verticais são transmitidas.

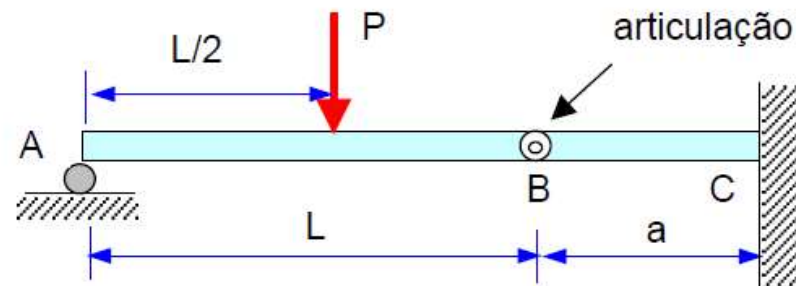
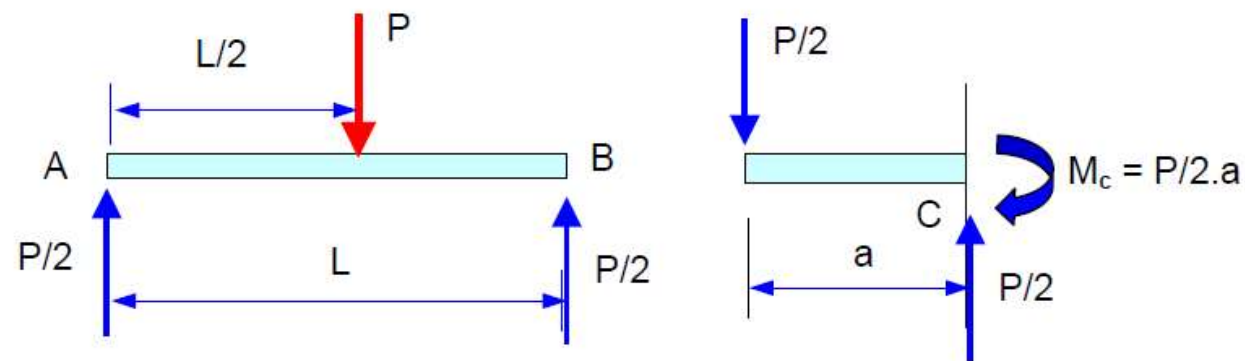


Diagrama de corpo livre (D.C.L.):



1 - CÁLCULO DAS REAÇÕES

- ❑ Conheça Modelos Estruturais e Reações de Apoio em:

<https://www.youtube.com/watch?v=3itNKgyxU7M>



<https://www.youtube.com/watch?v=kQWiroRx3ho>



Sugestão: FrameDesign app



<https://play.google.com/store/apps/details?id=nl.letsconstruct.framedesign>



<https://play.google.com/store/apps/details?id=nl.letsconstruct.beamdesign>



<https://play.google.com/store/apps/details?id=np.com.softwel.swframe2d>





Importante! Lista de Exercícios

Como reforço do aprendizado do conteúdo apresentado em sala de aula, são sugeridos os exercícios dispostos na lista abaixo. Bom estudo!

FERDINAND, P. B.; JOHNSTON JR, E. R; Resistência dos Materiais, Mc Graw-Hill

Resistência dos Materiais						
Capítulo 1	1.1	a	1.10			

Capítulo 2 – DIAGRAMAS DE FORÇA AXIAL, CORTANTE E DE MOMENTOS

- ≡ 2.1 – Método das seções
 - ≡ 2.1.1 – Força cortante nas vigas (V)
 - ≡ 2.1.2 – Força axial nas vigas (P)
 - ≡ 2.1.3 – Momento fletor (M)
 - ≡ 2.1.4 – Diagramas de forças cortante e axial e do momento fletor
- ≡ 2.2 – Método do somatório
 - ≡ 2.2.1 – Equações diferenciais de equilíbrio

2.1 – Método das seções

O método das seções estabelece procedimentos para a determinação dos esforços internos ao longo do comprimento da viga. O conceito de equilíbrio das partes de um corpo é utilizado quando o corpo com um todo está em equilíbrio.

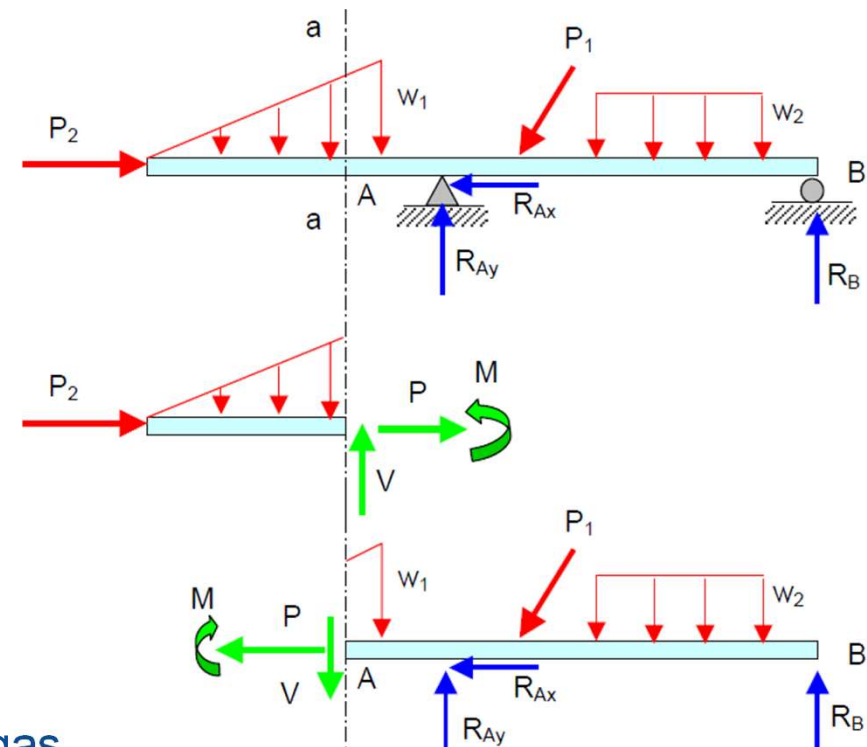


Figura 2.1 – Esforços internos em vigas

onde V é a força cortante, P é a força axial e M é o momento fletor.

2.1 – Método das seções

2.1.1 – Força cortante nas vigas (V)

A força cortante V , perpendicular ao eixo da viga, deve ser introduzida na seção: A-A para satisfazer a equação de equilíbrio $\Sigma F_y = 0$

A força cortante é definida positiva quando girar a seção no sentido anti-horário.

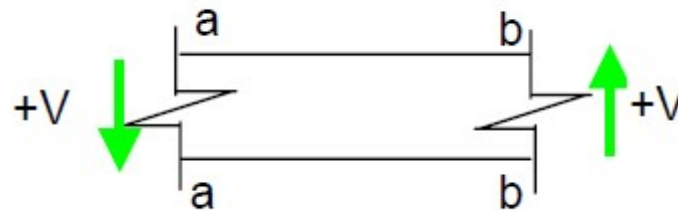


Figura 2.2 – Força cortante

2.1 – Método das seções

2.1.2 – Força axial nas vigas (P)

A força axial P , paralela ao eixo da viga e que passa pelo centroide da seção, deve ser introduzida na seção A-A para satisfazer a equação de equilíbrio $\Sigma F_x = 0$.

A força axial é definida positiva ou de tração quando agir de dentro para fora da seção e negativa ou de compressão em caso contrário.

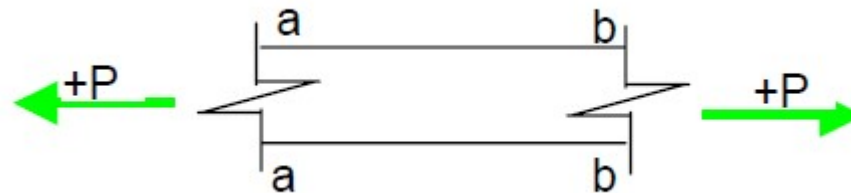


Figura 2.3 – Força axial

2.1 – Método das seções

2.1.3 – Momento fletor (M)

O momento fletor M , que gira em torno de um eixo perpendicular ao plano que contém a viga, deve ser introduzido na seção A-A para satisfazer a equação de equilíbrio $\Sigma M_z = 0$. Para isto, o momento provocado pelas forças é normalmente calculado em torno do ponto de interseção de V e P .

O momento fletor é definido positivo quando tracionar a parte inferior da viga e comprimir a parte superior da viga, e negativo em caso contrário.

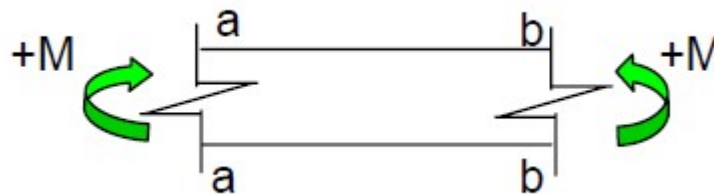


Figura 2.3 – Momento fletor

2.1 – Método das seções

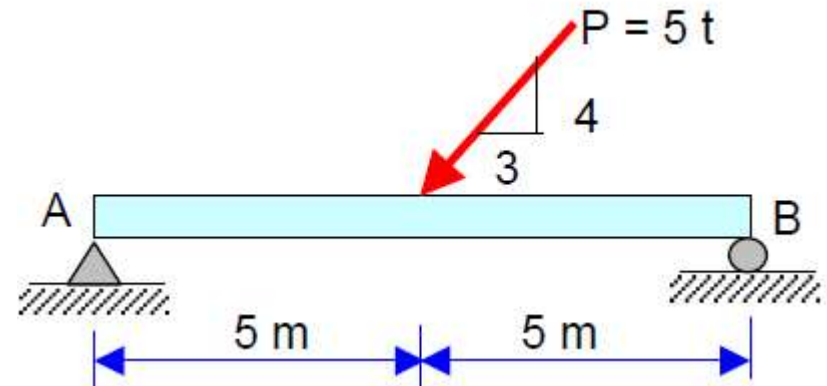
2.1.4 – Diagramas de forças cortante e axial e do momento fletor

Os diagramas de esforços internos são traçados para se determinar a evolução das forças cortante e axial e do momento fletor ao longo da viga, respectivamente.



Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – Exemplo 2.1

Exemplo 2.1: Traçar os diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor para a viga abaixo, sujeita à força inclinada de $P = 5\text{ t}$. Desprezar o peso da viga.

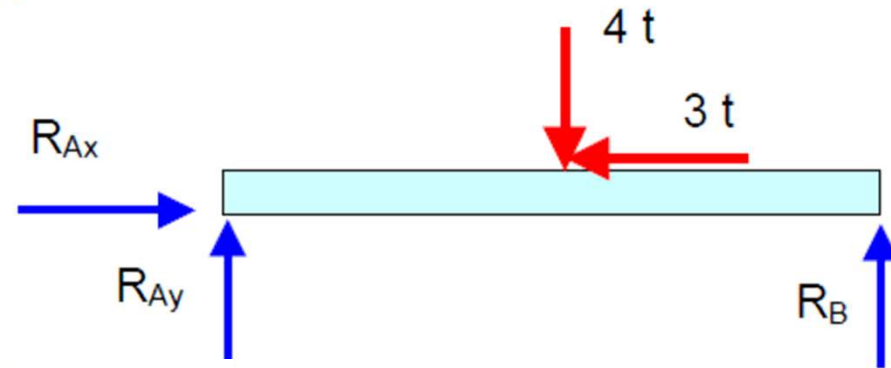




Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – Exemplo 2.1

a - Determinar as reações de apoio.

Diagrama de corpo livre (D.C.L.):



$$\rightarrow \sum F_x = 0, R_{Ax} - 3 = 0, R_{Ax} = 3 t$$

$$\curvearrowright \sum M_B = 0, R_{Ay} \cdot 10 - 4 \cdot 5 = 0, R_{Ay} = 2 t$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, 2 - 4 + R_B = 0, R_B = 2 t$$

Verificação:

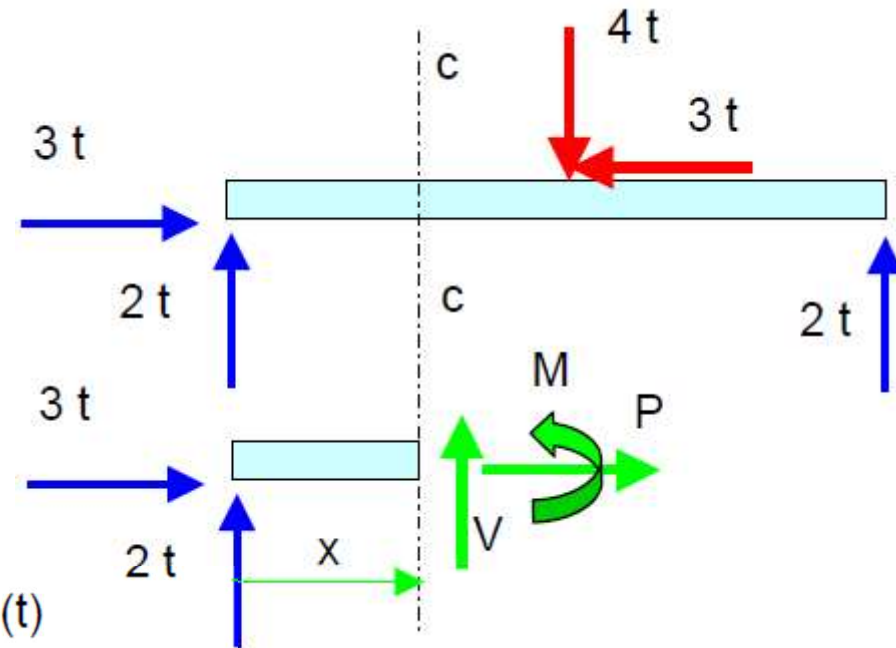
$$\curvearrowright \sum M_A = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 10 = 0 \quad (\text{OK})$$



Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – Exemplo 2.1

b - Determinar as forças cortante e axial e o momento fletor em seções entre duas forças concentradas.

Seção c-c ($0 < x < 5$):



$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad P + 3 = 0, \quad P = -3 \text{ (t)}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad V + 2 = 0, \quad V = -2 \text{ (t)}$$

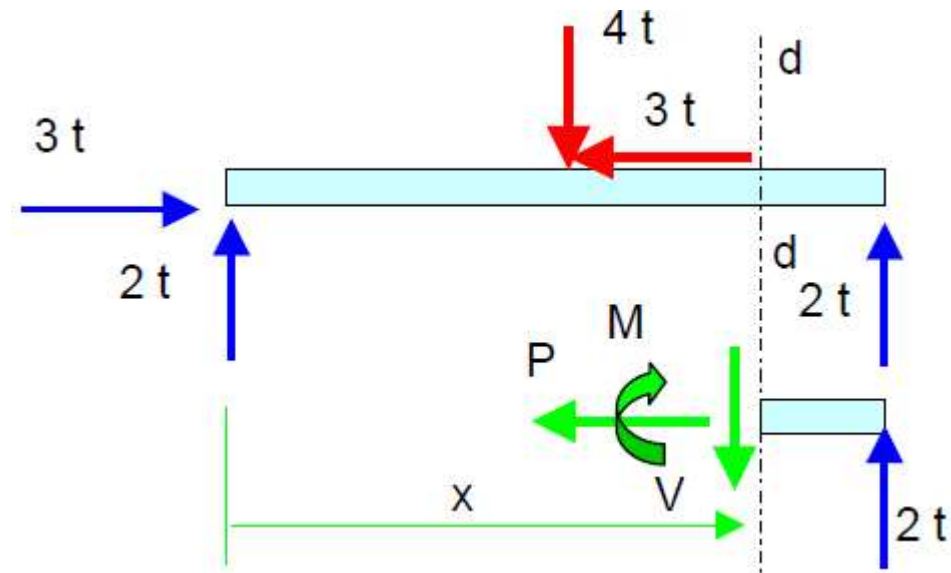
$$\curvearrow \sum M_c = 0, \quad -2 \cdot x + M = 0, \quad M = 2x \text{ (t.m)}$$



Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – Exemplo 2.1

b - Determinar as forças cortante e axial e o momento fletor em seções entre duas forças concentradas.

Seção d-d ($5 < x < 10$):



$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad P = 0$$

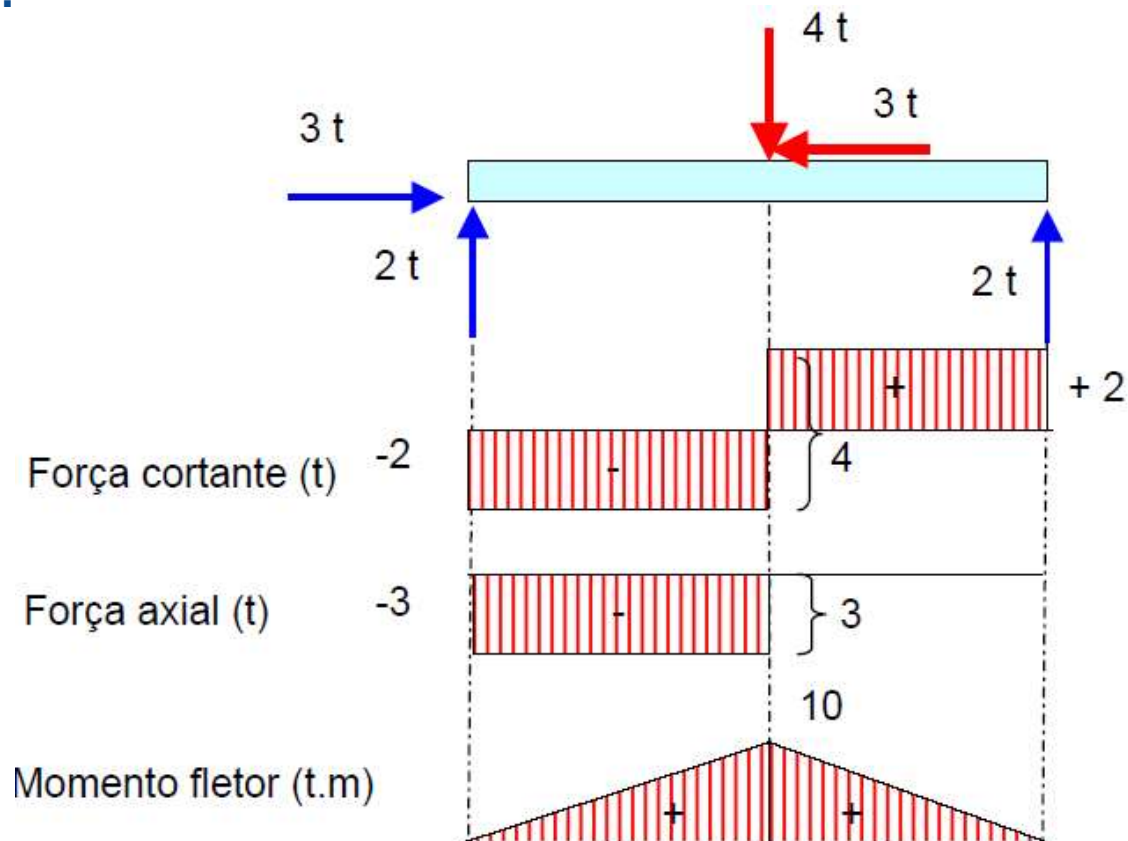
$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad -V + 2 = 0, \quad V = 2 \text{ (t)}$$

$$\curvearrow \sum M_d = 0, \quad -2 \cdot (10 - x) + M = 0, \quad M = -2x + 20 \text{ (t.m)}$$



Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – Exemplo 2.1

c - Traçar os diagramas de força cortante, força axial e do momento fletor.





Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – **Exemplo 2.1**

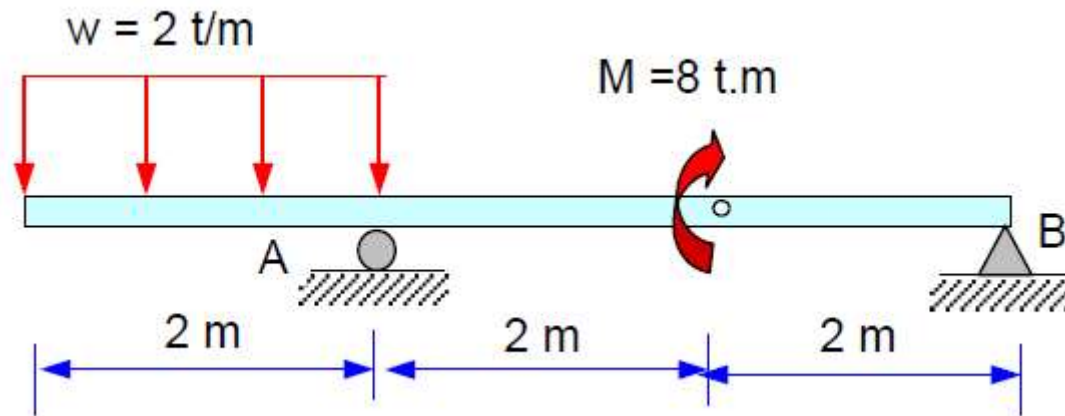
Conclusões Importantes:

- Ponto de força concentrada vertical \Rightarrow Descontinuidade no diagrama de força cortante igual a força concentrada vertical.
- Ponto de força concentrada axial \Rightarrow Descontinuidade no diagrama de força axial igual a força concentrada axial.



Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – Exemplo 2.2

Traçar os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga apresentada abaixo, sujeita à uma força distribuída e a um momento concentrado.



Determinar **(roteiro)**:

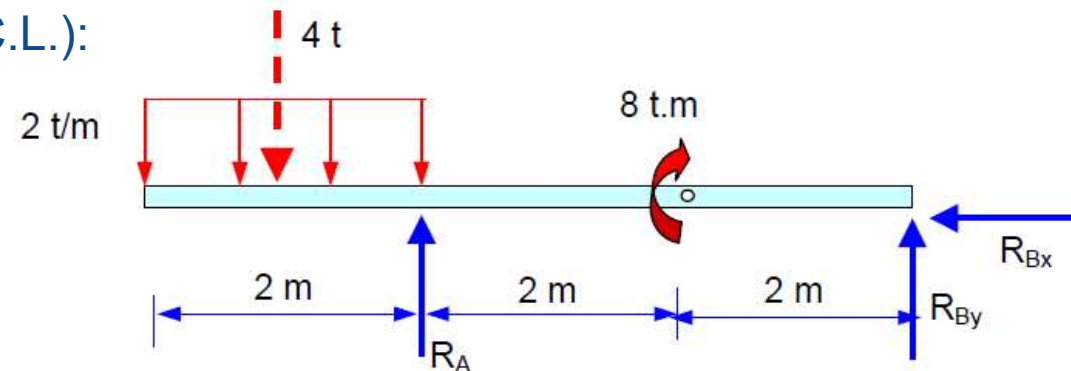
- Determinar as reações nos apoios (D.C.L.):
- Determinar as forças cortante e o momento fletor em seções entre forças e momentos concentrados e ao longo de uma carga distribuída.
- Traçar os diagramas de força cortante e do momento fletor.



Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – Exemplo 2.2

a - Determinar as reações de apoio.

Diagrama de corpo livre (D.C.L.):



$$\rightarrow \sum F_x = 0, R_{Bx} = 0$$

$$\curvearrowright \sum M_B = 0, -4 \cdot 5 + R_A \cdot 4 + 8 = 0, R_A = 3 \text{ t}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, -4 + 3 + R_{By} = 0, R_{By} = 1 \text{ t}$$

Verificação:

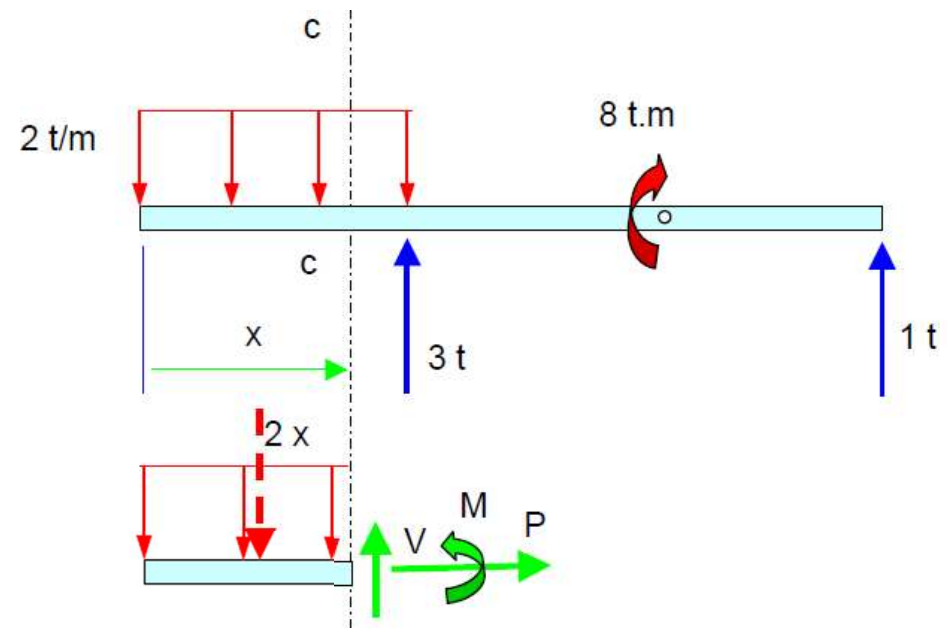
$$\curvearrowright \sum M_A = -4 \cdot 1 + 8 - 1 \cdot 4 = 0 \text{ (OK)}$$



Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – Exemplo 2.2

b - Determinar as forças cortante e o momento fletor em seções entre forças e momentos concentrados e ao longo de uma carga distribuída.

Seção c-c ($0 < x < 2$):



$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad P = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad -2 \cdot x + V = 0, \quad V = 2x \quad (\text{t})$$

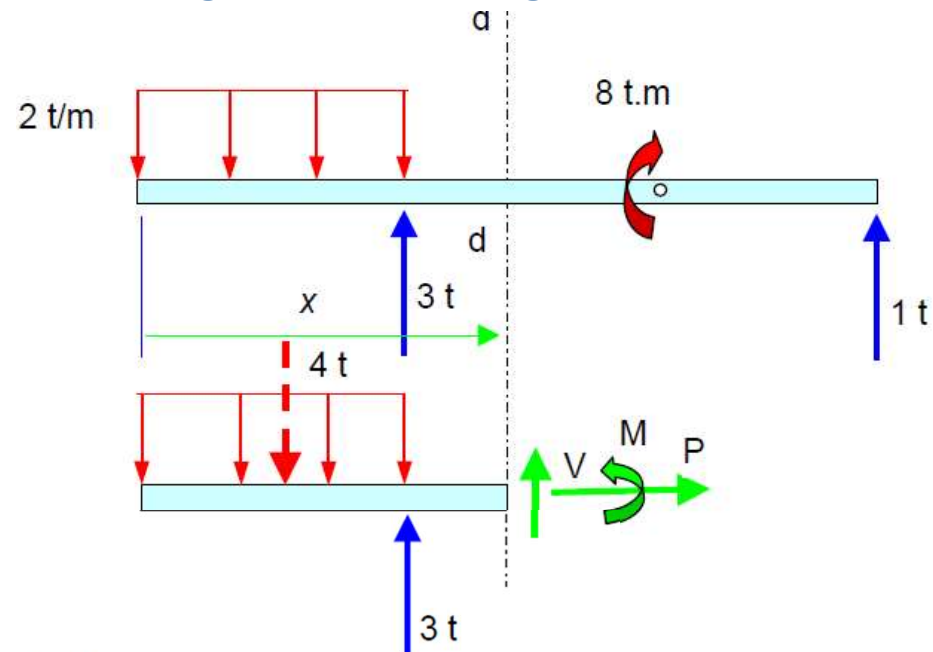
$$\curvearrowleft \sum M_c = 0, \quad 2 \cdot x \cdot x / 2 + M = 0, \quad M = -x^2 \quad (\text{t.m})$$



Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – Exemplo 2.2

b - Determinar as forças cortante e o momento fletor em seções entre forças e momentos concentrados e ao longo de uma carga distribuída.

Seção d-d ($2 < x < 4$):



$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad P = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad -4 + 3 + V = 0, \quad V = 1 \text{ (t)}$$

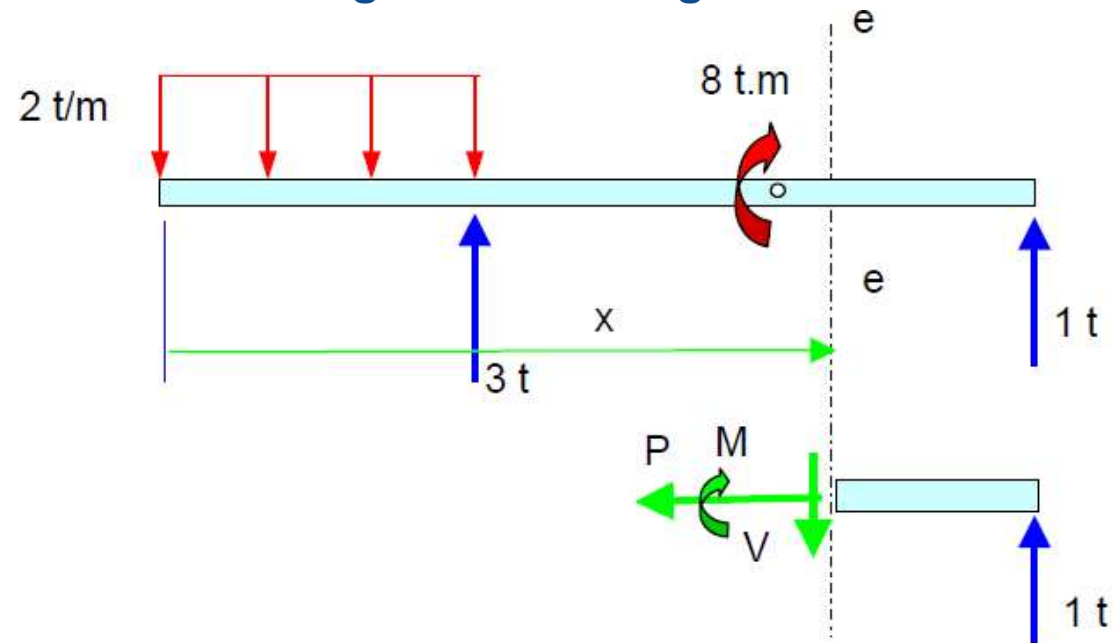
$$\curvearrow \sum M_d = 0, \quad 4 \cdot (x - 1) - 3 \cdot (x - 2) + M = 0, \quad M = -x - 2 \text{ (t.m)}$$



Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – Exemplo 2.2

b - Determinar as forças cortante e o momento fletor em seções entre forças e momentos concentrados e ao longo de uma carga distribuída.

Seção e-e ($4 < x < 6$):



$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad P = 0$$

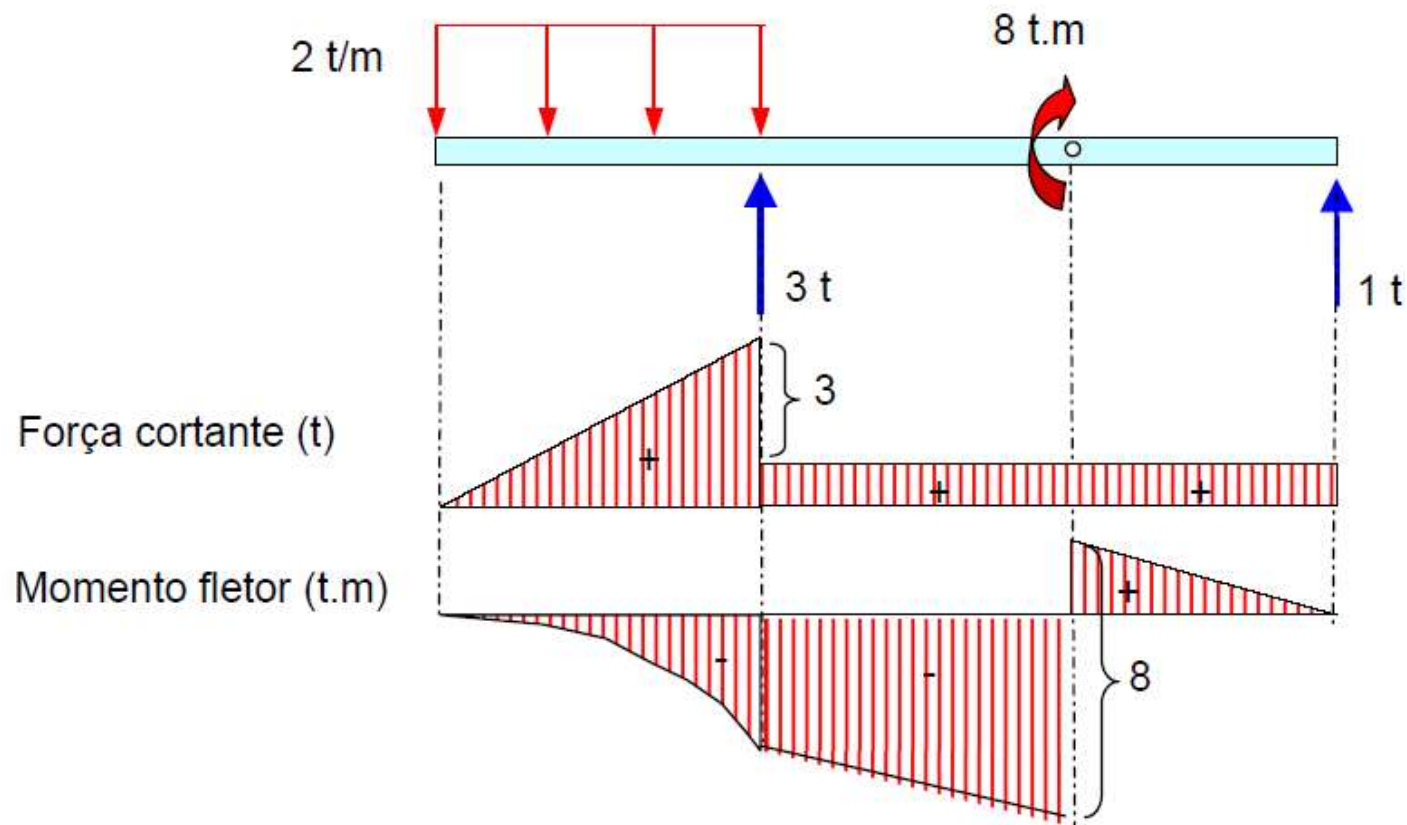
$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad -V + 1 = 0, \quad V = 1 \text{ (t)}$$

$$\curvearrowright \sum M_E = 0, \quad -1 \cdot (6 - x) + M = 0, \quad M = -x + 6 \text{ (t.m)}$$



Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – Exemplo 2.2

c -Traçar os diagramas de força cortante e do momento fletor.





Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – **Exemplo 2.2**

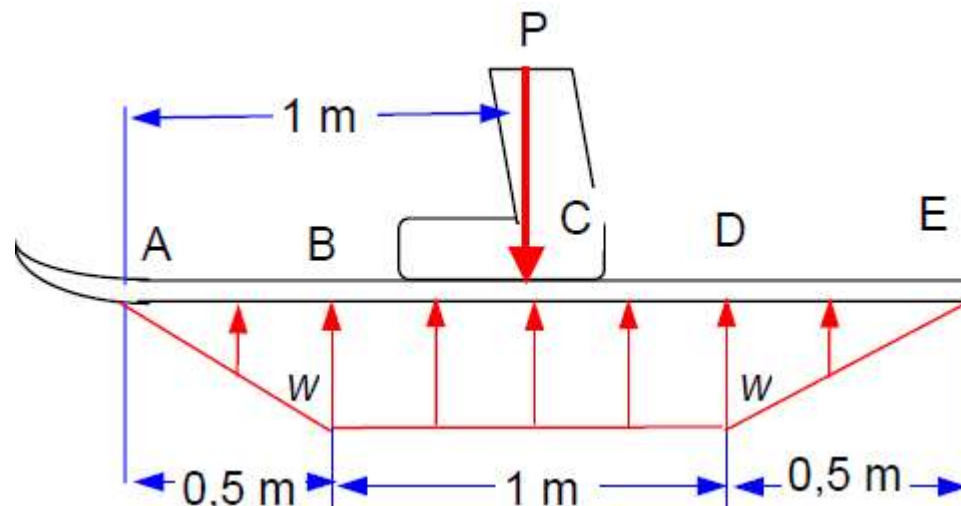
Conclusões Importantes (além das anteriores):

- ❑ Ponto de momento concentrado \Rightarrow Descontinuidade no diagrama de momento fletor igual ao momento concentrado.



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – **Exemplo 2.3**

Os skis suportam um homem de 80 kg. Se o carregamento da neve na superfície inferior de um ski é trapezoidal como mostrado abaixo, determine a intensidade w e trace os diagramas de força cortante e de momento fletor para um ski. Tome $g=10 \text{ m/s}^2$.

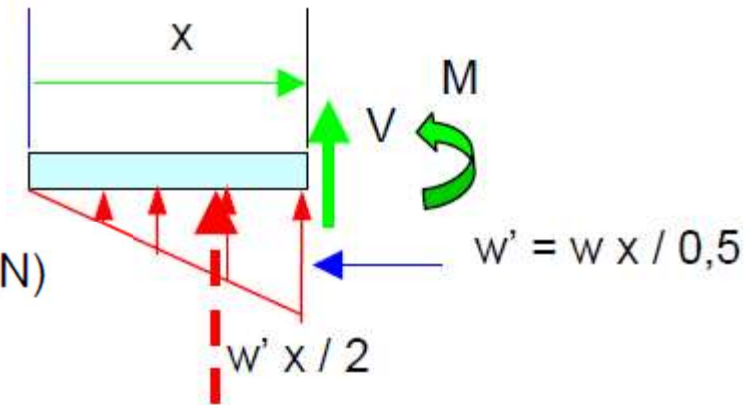


$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad , \quad 0,25 w + w + 0,25 w - 400 = 0 \quad , \quad w = 266,67 \text{ N/m}$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – **Exemplo 2.3**

Trecho AB



$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad \frac{w x}{0,5} \frac{x}{2} + V = 0, \quad V = -266,67 x^2 \quad (\text{N})$$

$$\begin{cases} p/x = 0, V = 0 \\ p/x = 0,5, V = -66,67 \text{ N} \end{cases}$$

$$\curvearrowright \sum M = 0, \quad -\frac{w x}{0,5} \frac{x}{2} \frac{x}{3} + M = 0, \quad M = 88,89 x^3 \quad (\text{N.m})$$

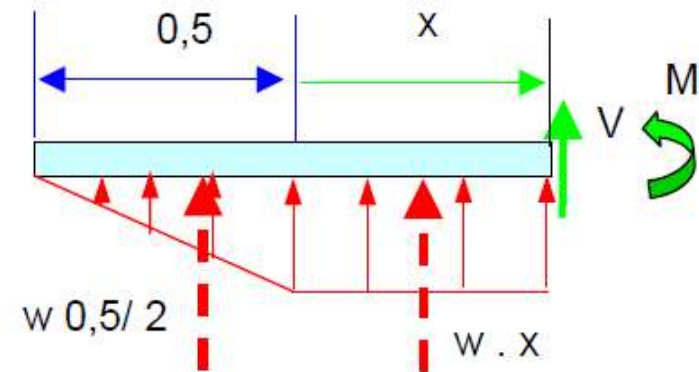
$$\begin{cases} p/x = 0, M = 0 \\ p/x = 0,5, M = 11,11 \text{ Nm} \end{cases}$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – Exemplo 2.3

Trecho BC



$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad \frac{w \cdot 0,5}{2} + w \cdot x + V = 0, \quad V = -266,67x - 66,67 \text{ (N)}$$

$$\begin{cases} p/x = 0, V = -66,67 \text{ N} \\ p/x = 0,5, V = -200 \text{ N} \end{cases}$$

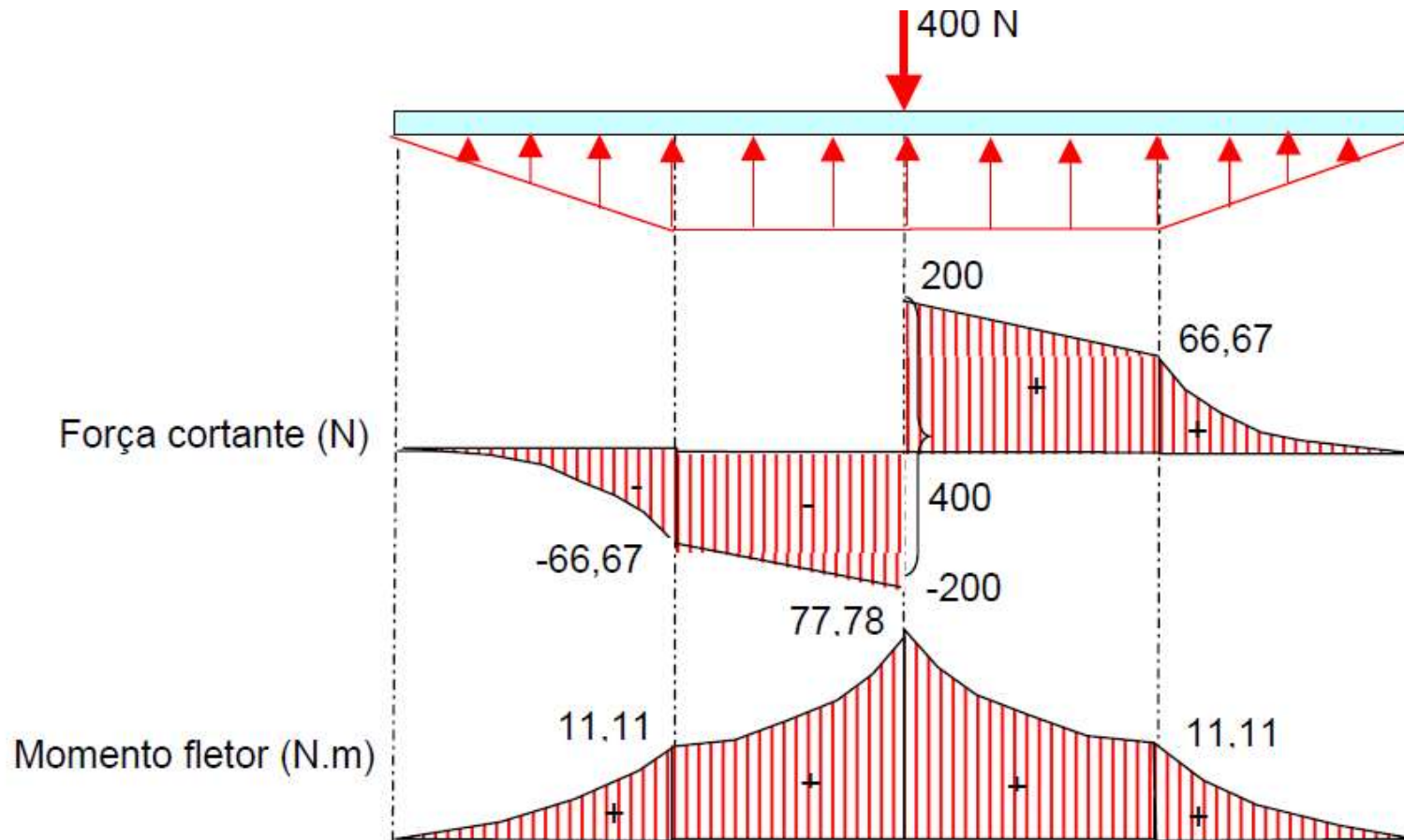
$$\curvearrowright \sum M = 0, \quad -\frac{w \cdot 0,5}{2} \left(0,5 \cdot \frac{1}{3} + x \right) - w \cdot x \cdot \frac{x}{2} + M = 0, \quad M = 133,34x^2 + 66,67x + 11,11$$

$$\begin{cases} p/x = 0, M = 11,11 \text{ N.m} \\ p/x = 0,5, M = 77,78 \text{ N.m} \end{cases}$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – **Exemplo 2.3**

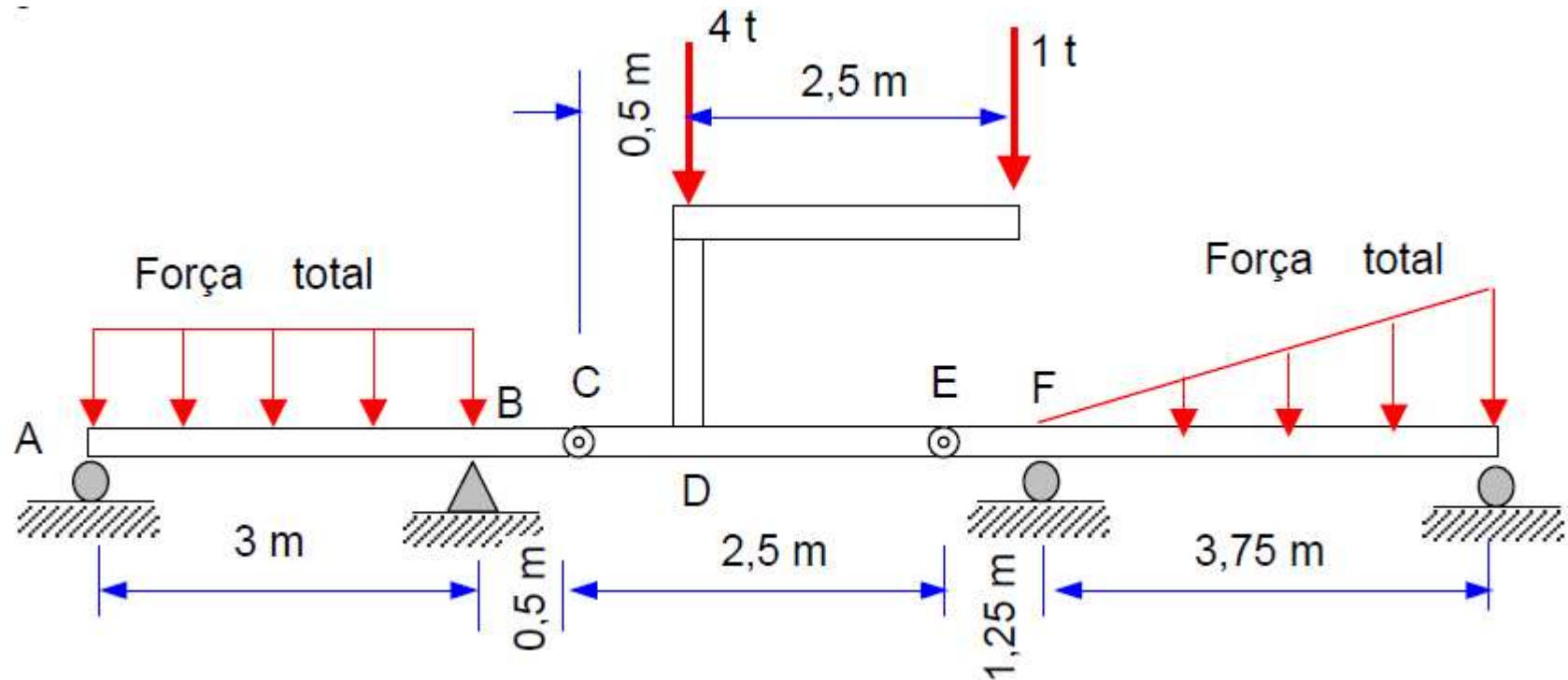
Devido à simetria temos:





Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – **Exemplo 2.4**

Determine os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga abaixo.

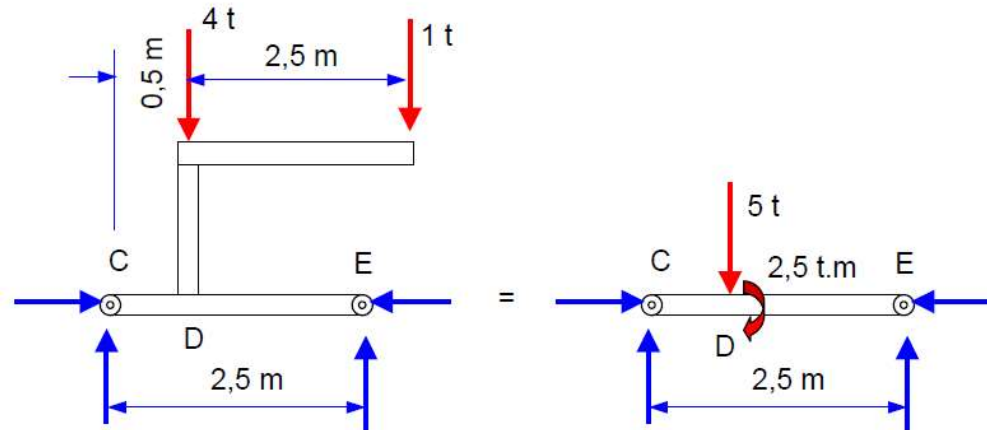




Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – **Exemplo 2.4**

Diagrama de Corpo Livre (DCL):

Viga CDE:



$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad R_{cx} - R_{Ex} = 0 \Rightarrow R_{cx} = R_{Ex}$$

$$\curvearrowleft \sum M_C = 0, \quad R_{Ey} \cdot 2,5 - 1 \cdot 3 - 4 \cdot 0,5 = 0 \Rightarrow R_{Ey} = 2 \text{ t}$$

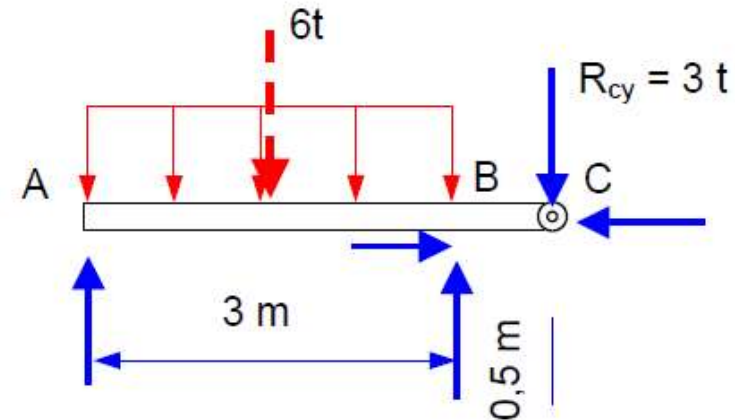
$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad R_{cy} + R_{Ey} - 4 - 1 = 0 \Rightarrow R_{cy} = 3 \text{ t}$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – **Exemplo 2.4**

Diagrama de Corpo Livre (DCL):

Viga ABC:



$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad R_{Bx} - R_{Cx} = 0 \Rightarrow R_{Bx} = R_{Cx}$$

$$\curvearrowright \sum M_A = 0, \quad R_{By} \cdot 3 - 6 \cdot 1,5 - R_{cy} \cdot 3,5 = 0 \Rightarrow R_{By} = 6,5 \text{ t}$$

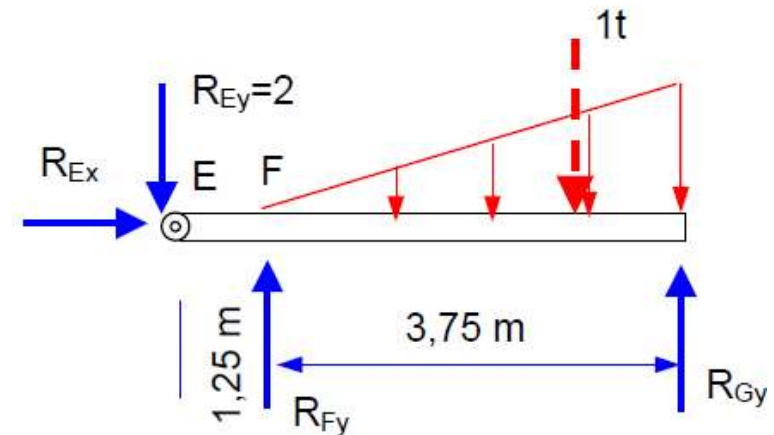
$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad R_{Ay} + R_{By} - 6 - R_{Cy} = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 2,5 \text{ t}$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – Exemplo 2.4

Diagrama de Corpo Livre (DCL):

Viga EFG:



$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad R_{Ex} = 0 \Rightarrow R_{Bx} = R_{Cx} = R_{Ex} = 0$$

$$\curvearrowleft \sum M_G = 0, \quad 2 \cdot (1,25 + 3,75) - R_{Fy} \cdot 3,75 + 1 \cdot 3,75/3 = 0 \Rightarrow R_{Fy} = 3 \text{ t}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad -2 + R_{Fy} - 1 + R_{Gy} = 0 \Rightarrow R_{Gy} = 0 \text{ t}$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – Exemplo 2.4

Diagrama de Corpo Livre (DCL):

$$w \cdot 3 = 6 \text{ t (força total)}$$

Viga ABC

$$w = 2 \text{ t/m}$$

Trecho AB ($0 < x < 3$)

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad 2,5 - 2x + V = 0 \Rightarrow V = 2x - 2,5 \text{ (t)}$$

$$p/x = 0, \quad V_A = -2,5 \text{ t}$$

$$p/x = 3, \quad V_B = 3,5 \text{ t}$$

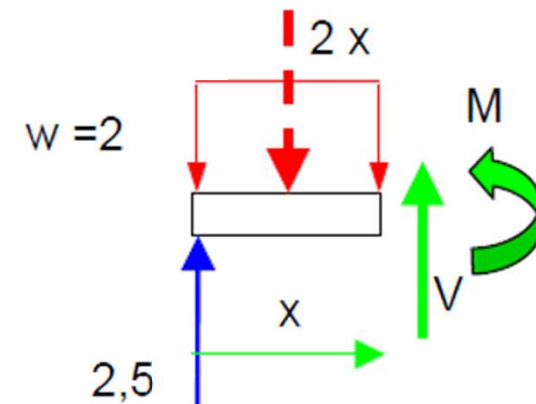
$$\curvearrowleft \sum M = 0, \quad -2,5x + 2x \cdot x / 2 + M = 0 \Rightarrow M = -x^2 + 2,5x \text{ (t.m)}$$

$$p/x = 0, \quad M_A = 0 \text{ t.m}$$

$$p/x = 3, \quad M_B = -1,5 \text{ t.m}$$

$$\text{Momento máximo: } \frac{dM}{dx} = 0, \quad -2x + 2,5 = 0 \Rightarrow x = 1,25 \text{ m}$$

$$M_{\max} (x = 1,25\text{m}) = -(1,25)^2 + 2,5 \cdot 1,25 \Rightarrow M_{\max} = 1,5625 \text{ (t.m)}$$



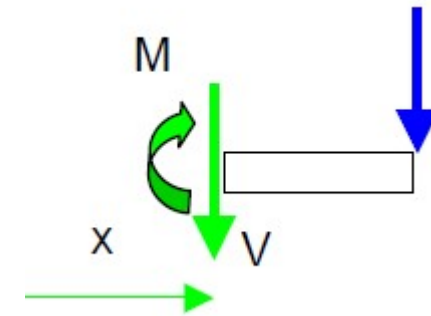


Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – **Exemplo 2.4**

Diagrama de Corpo Livre (DCL):

Viga ABC

Trecho BC ($0 < x < 0,5$):



$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad -3 - V = 0 \Rightarrow V = -3 \text{ (t)}$$

$$p/x = 0, \quad V_B = -3 \text{ t}$$

$$p/x = 0,5, \quad V_C = -3 \text{ t}$$

$$\curvearrowright \sum M = 0, \quad -3 \cdot (0,5 - x) - M = 0 \Rightarrow M = 3x - 1,5 \text{ (t.m)}$$

$$p/x = 0, \quad M_B = -1,5 \text{ t.m}$$

$$p/x = 0,5, \quad M_C = 0 \text{ t.m}$$

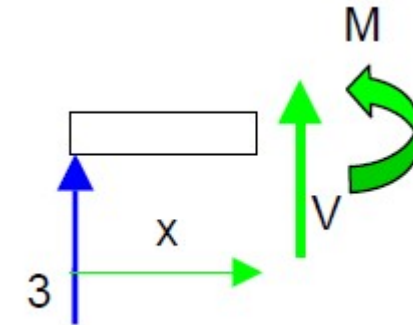


Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – **Exemplo 2.4**

Diagrama de Corpo Livre (DCL):

Viga CDE

Trecho CD ($0 < x < 0,5$):



$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad 3 + V = 0 \Rightarrow V = -3 \text{ (t)}$$

$$p/x = 0, \quad V_C = -3 \text{ t}$$

$$p/x = 0,5, \quad V_D = -3 \text{ t}$$

$$\curvearrowleft \sum M = 0, \quad -3x + M = 0 \Rightarrow M = 3x \text{ (t.m)}$$

$$p/x = 0, \quad M_C = 0 \text{ t.m}$$

$$p/x = 0,5, \quad M_D = 1,5 \text{ t.m}$$

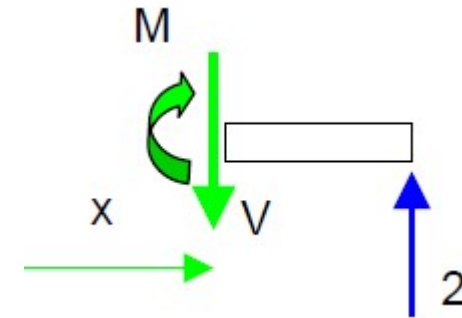


Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – **Exemplo 2.4**

Diagrama de Corpo Livre (DCL):

Viga CDE

Trecho DE ($0 < x < 2$):



$$\uparrow \sum F_y = 0, -V + 2 = 0 \Rightarrow V = 2 \text{ (t)}$$

$$p/x = 0, V_D = 2 \text{ t}$$

$$p/x = 2, V_E = 2 \text{ t}$$

$$\curvearrowright \sum M = 0, 2 \cdot (2 - x) - M = 0 \Rightarrow M = -2x + 4 \text{ (t.m)}$$

$$p/x = 0, M_D = 4 \text{ t.m}$$

$$p/x = 2, M_E = 0 \text{ t.m}$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – **Exemplo 2.4**

Diagrama de Corpo Livre (DCL):

Viga EFG

Trecho EF ($0 < x < 1,25$):

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad -2 + V = 0 \Rightarrow V = 2 \text{ (t)}$$

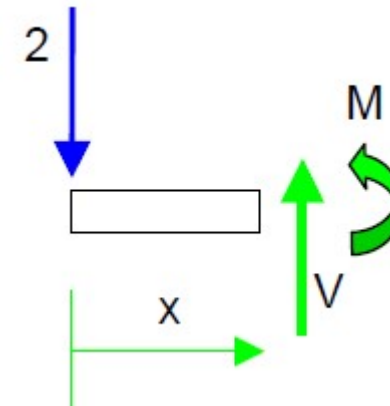
$$p/x = 0, \quad V_E = 2 \text{ t}$$

$$p/x = 1,25, \quad V_F = 2 \text{ t}$$

$$\curvearrowleft \sum M = 0, \quad 2x + M = 0 \Rightarrow M = -2x \text{ (t.m)}$$

$$p/x = 0, \quad M_E = 0 \text{ t.m}$$

$$p/x = 1,25, \quad M_F = -2,5 \text{ t.m}$$





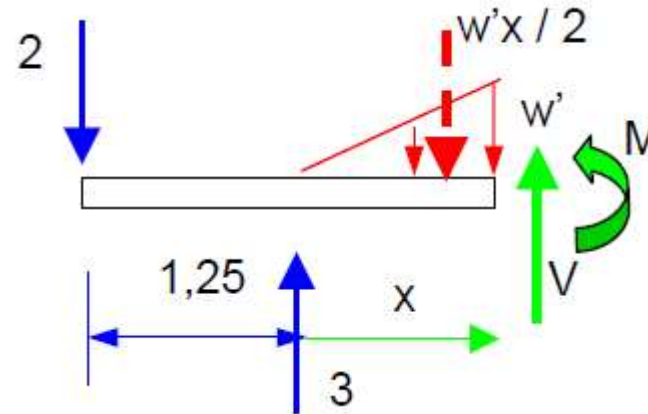
Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – **Exemplo 2.4**

Diagrama de Corpo Livre (DCL):

Viga EFG

Trecho FG (0 < x < 3,75):



$$\frac{w \cdot 3,75}{2} = 1 \text{ (total)}$$

$$w = \frac{2}{3,75} \text{ (t.m)}$$

$$w \rightarrow 3,75$$

$$w' \rightarrow x$$

$$w' = \frac{2}{3,75^2} x$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad -2 + 3 - w' x / 2 + V = 0 \Rightarrow V = \frac{x^2}{3,75^2} - x \text{ (t)}$$

$$p/x = 0, \quad V_F = -1 \text{ t}$$

$$p/x = 3,75, \quad V_G = 0 \text{ t}$$

$$\curvearrowright \sum M = 0, \quad 2 \cdot (1,25 + x) - 3 \cdot x + (w' x / 2) \cdot x / 3 + M = 0 \Rightarrow M = -\frac{x^3}{3 \cdot 3,75^2} + x - 2,5 \text{ (t.m)}$$

$$p/x = 0, \quad M_F = -2,5 \text{ t.m}$$

$$p/x = 3,75, \quad M_G = 0 \text{ t.m}$$

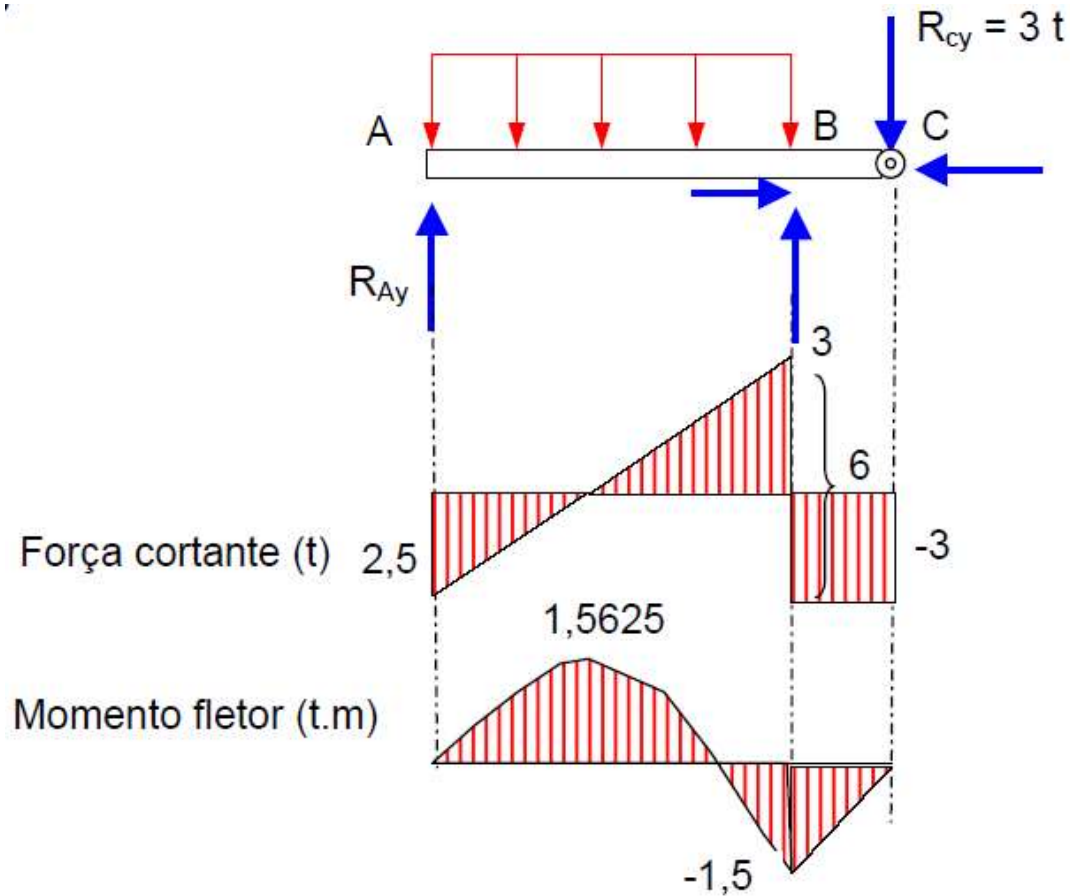


Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – Exemplo 2.4

Diagramas de força cortante e do momento fletor

Viga ABC:

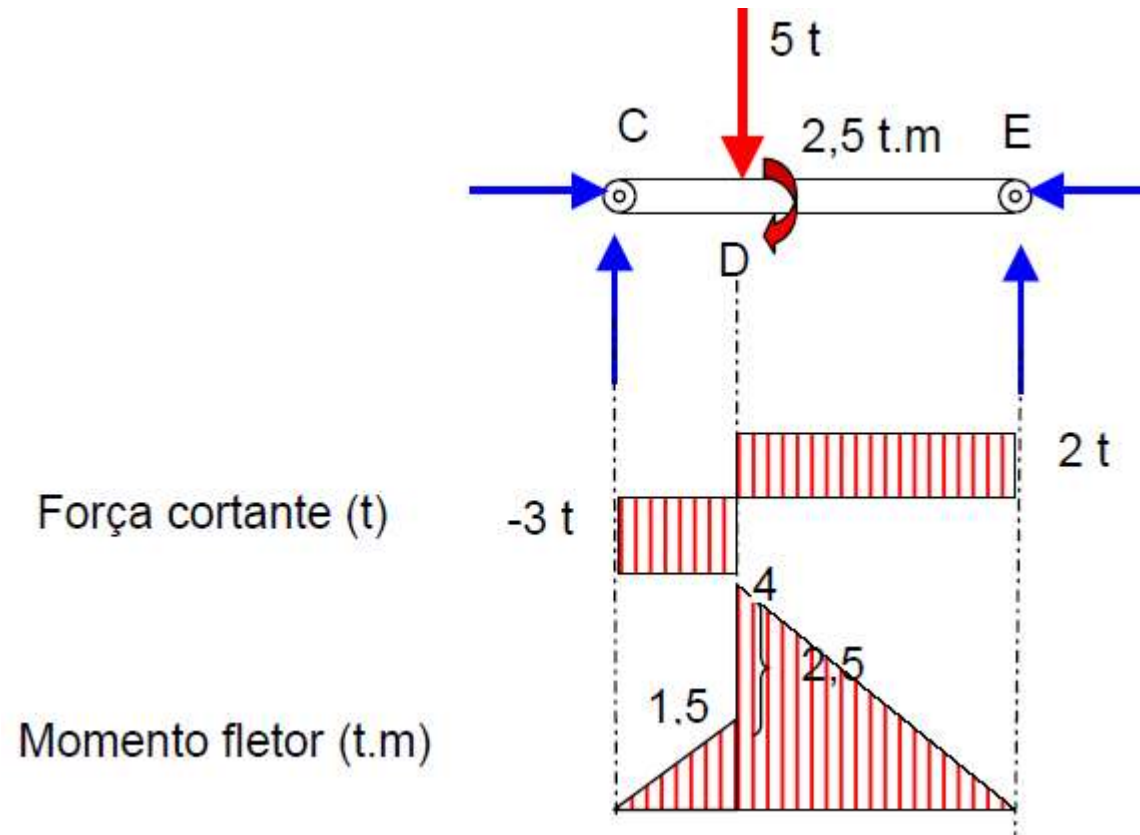




Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – **Exemplo 2.4**

Diagramas de força cortante e do momento fletor

Viga CDE:



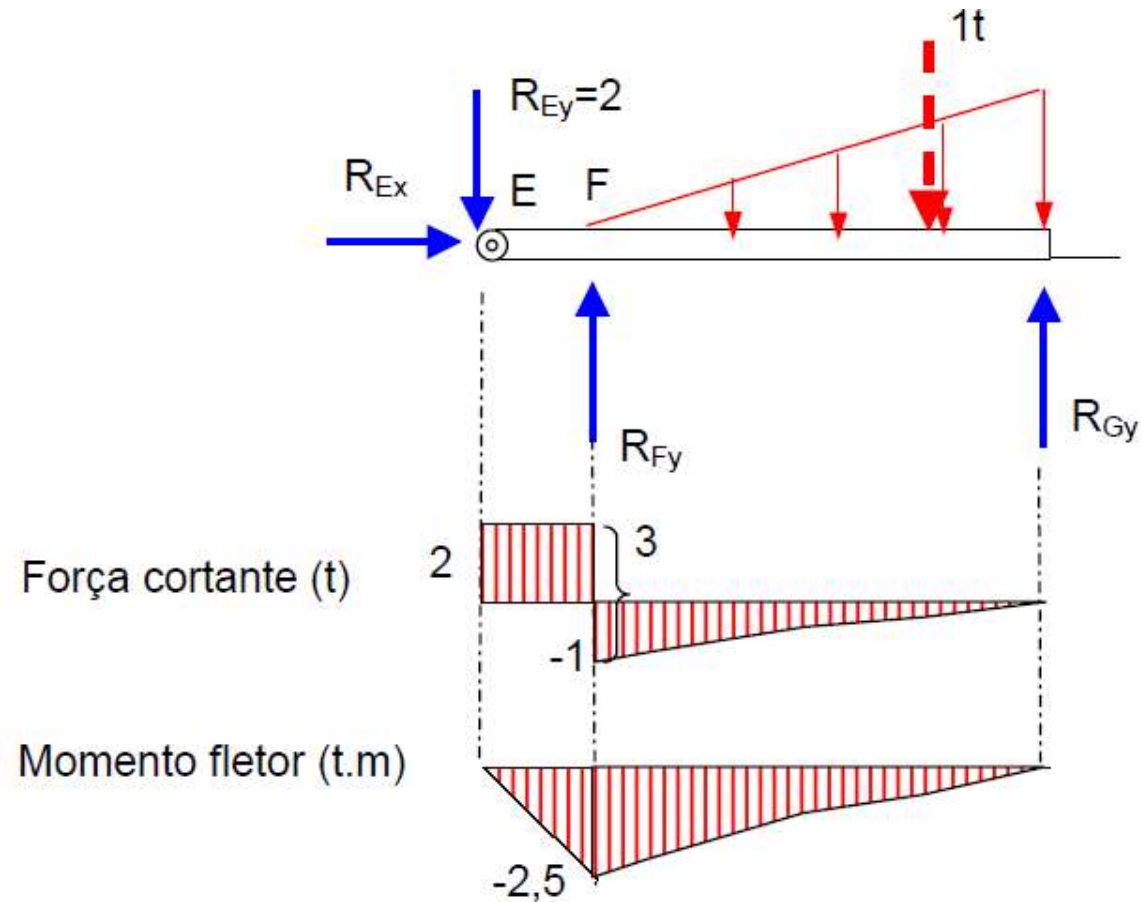


Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor – Exemplo 2.4

Diagramas de força cortante e do momento fletor

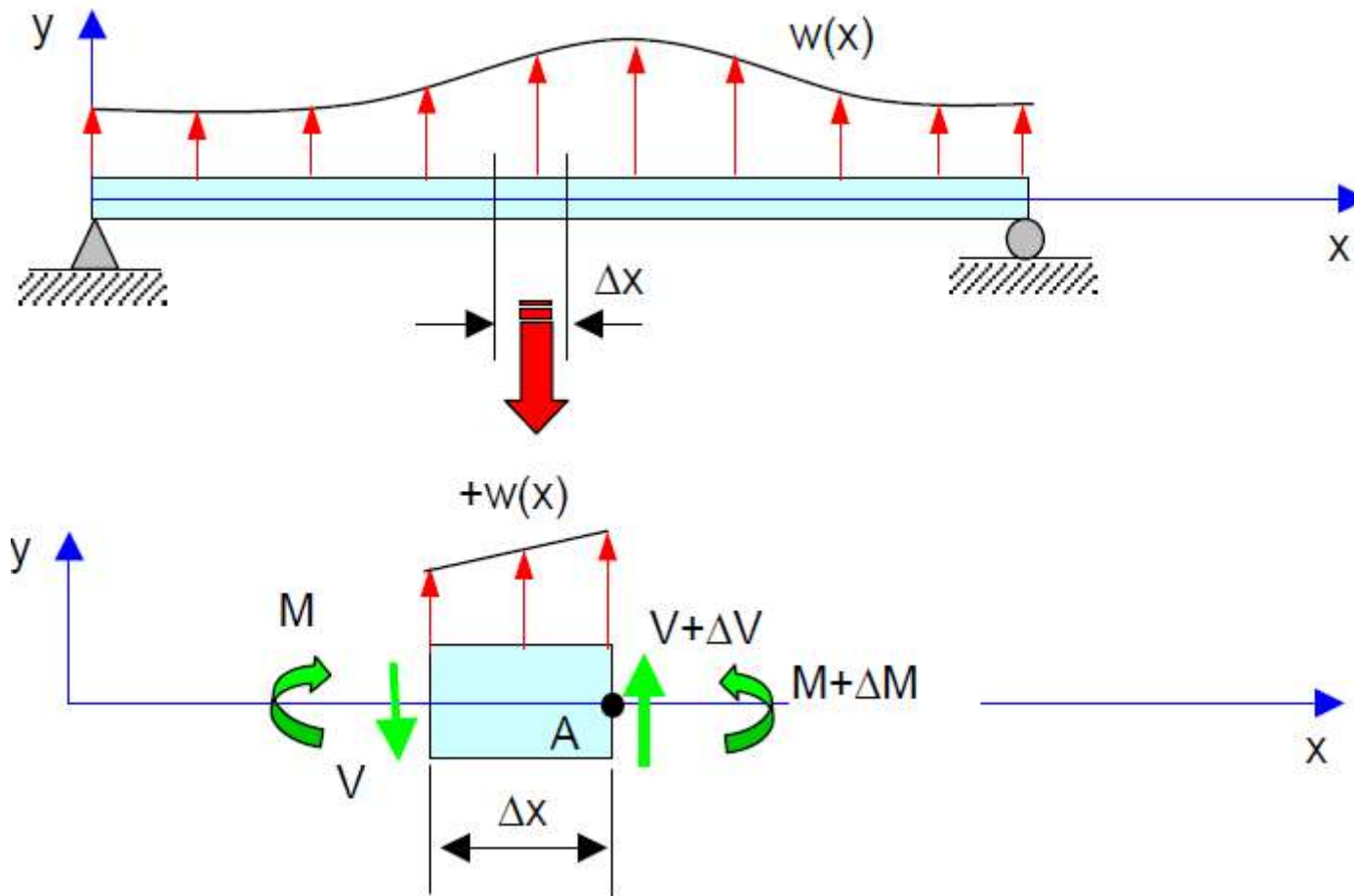
Viga EFG:



2.2 – Método do somatório.

2.2.1 – Equações diferenciais de equilíbrio

Considere a viga com uma carga distribuída $w(x)$.



2.2 – Método do somatório.

2.2.1 – Equações diferenciais de equilíbrio

Pelas condições de equilíbrio das forças verticais ($\Sigma F_y = 0$) e dos momentos ($\Sigma M = 0$) temos:

$$\uparrow \Sigma F_y = 0, -V + w \cdot \Delta x + (V + \Delta V) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta x} = -w \quad (2.1)$$

$$\curvearrowleft \Sigma M_A = 0, M - V \cdot \Delta x + w \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2} - (M + \Delta M) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta M}{\Delta x} = -V + w \cdot \frac{\Delta x}{2} \quad (2.2)$$

As eqs. (2.1) e (2.2) sendo avaliadas no limite, quando $\Delta x \Rightarrow 0$, fornecem as duas equações diferenciais básicas:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} \equiv \frac{dV}{dx} = -w \Rightarrow V(x) = -\int_0^x w(x) \cdot dx + C_1 \quad (2.3)$$

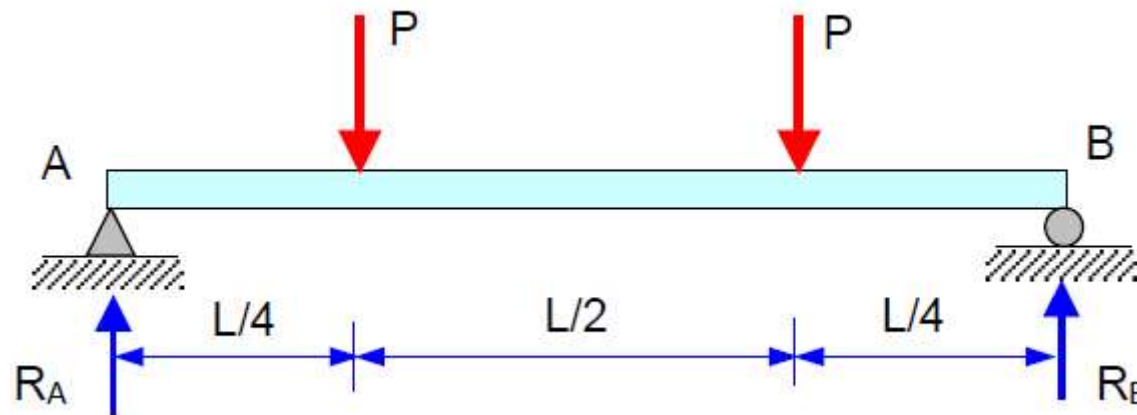
e

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} \equiv \frac{dM}{dx} = -V \Rightarrow M(x) = -\int_0^x V(x) \cdot dx + C_2 \quad (2.4)$$



Método do somatório / Equações diferenciais de equilíbrio – Exemplo 2.5

Traçar os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga usando o método do somatório.





Método do somatório / Equações diferenciais de equilíbrio – Exemplo 2.5

a - Determinar as reações nos apoios.

$$\curvearrowright \sum M_A = 0, -P \cdot \frac{L}{4} - P \cdot \frac{3L}{4} + R_B \cdot L = 0 \Rightarrow R_B = P$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, R_A - P - P + P = 0 \Rightarrow R_A = P$$

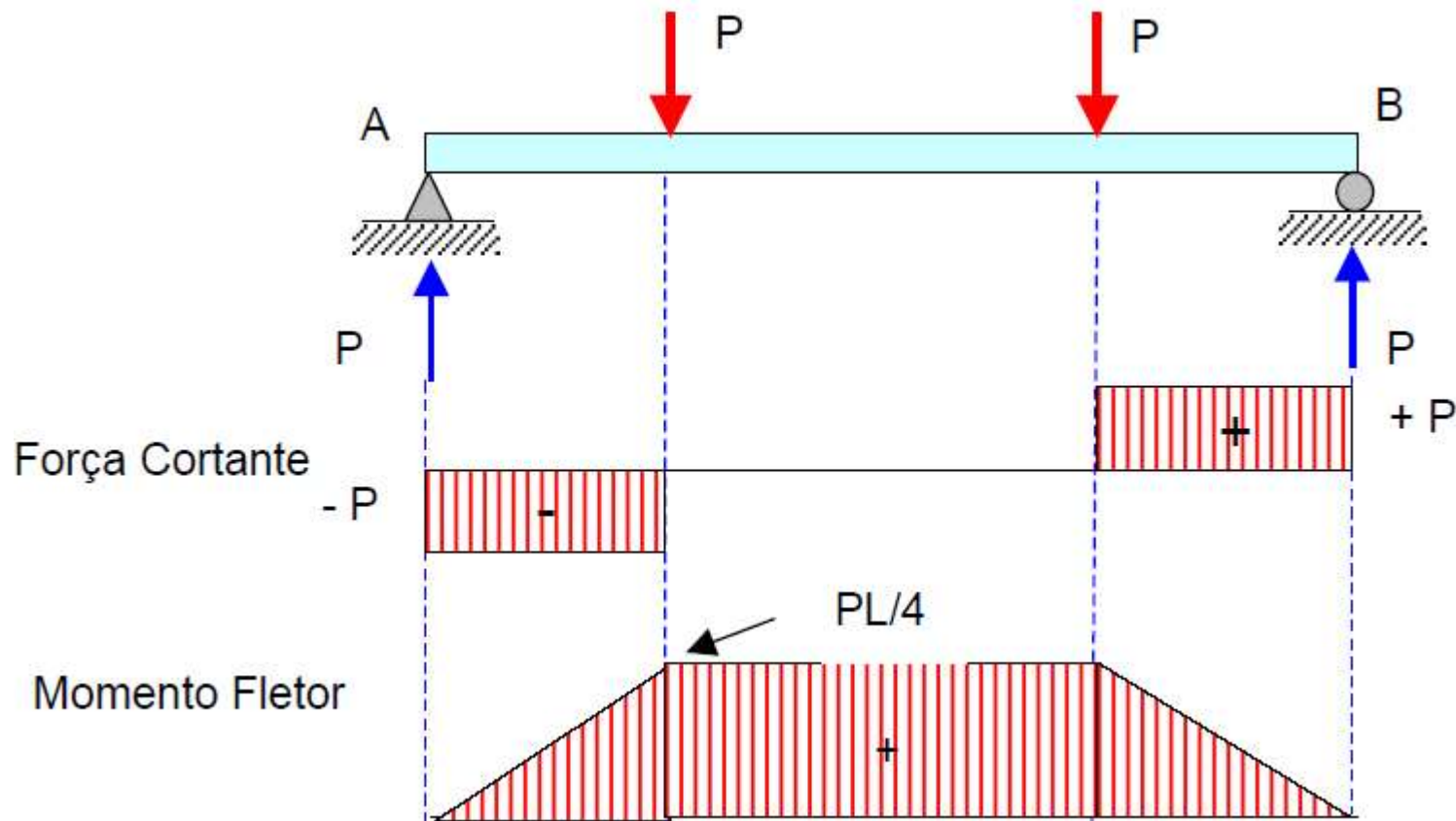
Da eq. (2.3), sabendo que $w(x) = 0 \Rightarrow V(x) = \text{constante} = V$. Da eq.(2.4), como V é constante, a equação de momento fletor no trecho é da forma:

$$M(x) = -Vx + C_2$$



Método do somatório / Equações diferenciais de equilíbrio – Exemplo 2.5

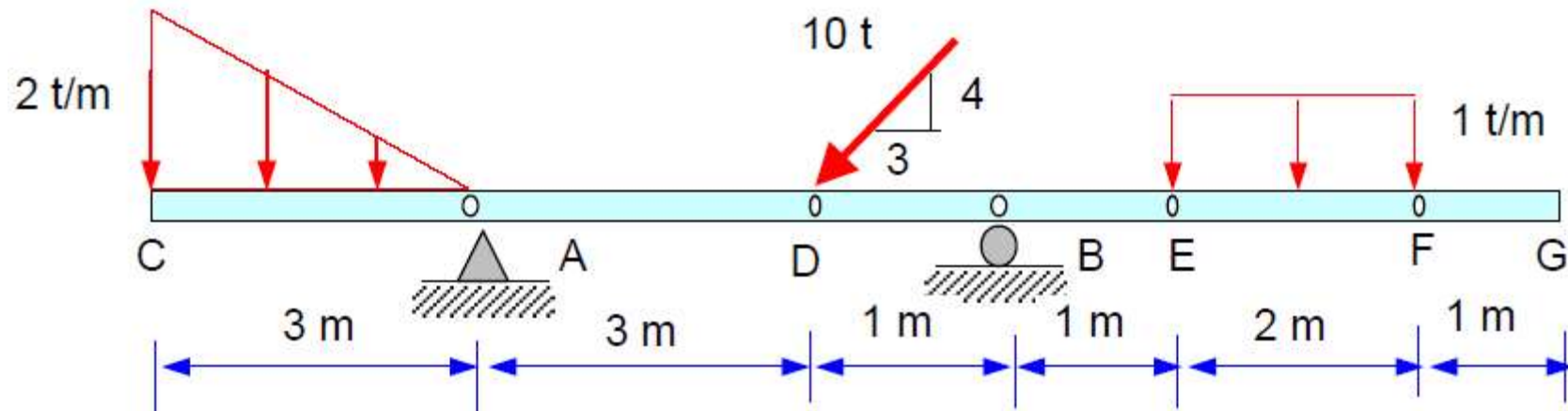
b - Traçar os diagramas de força cortante e momento fletor.





Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Método do somatório / Equações diferenciais de equilíbrio – **Exemplo 2.6**

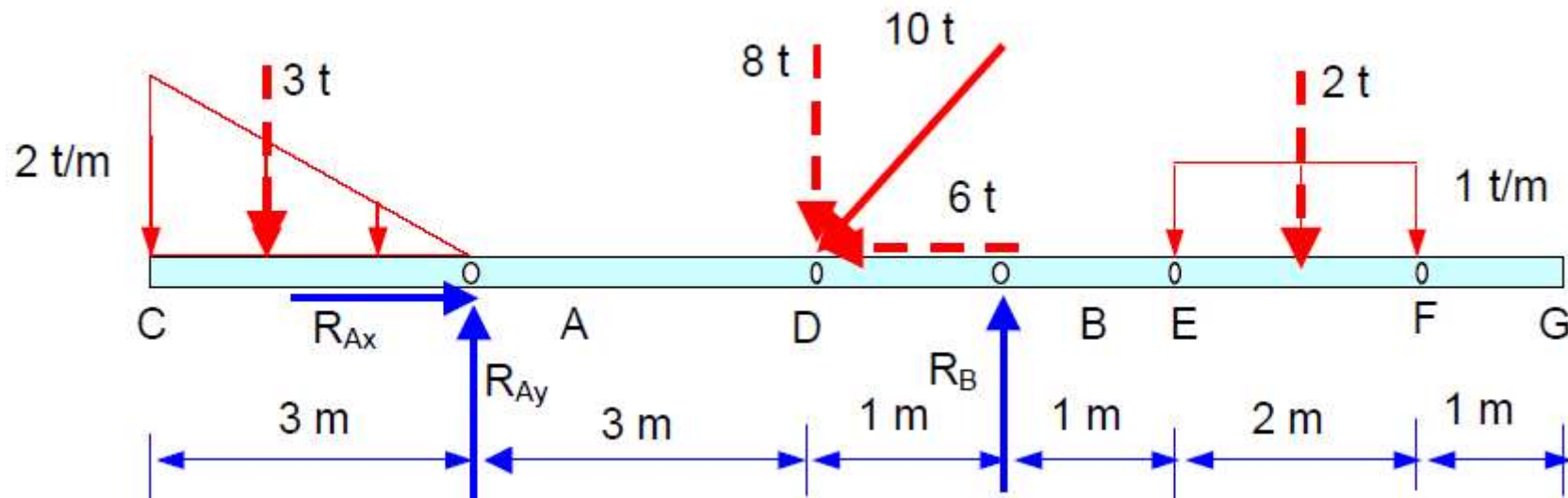
Construir os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga com o carregamento mostrado abaixo, usando o método do somatório.





Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Método do somatório / Equações diferenciais de equilíbrio – Exemplo 2.6

a - Determinar as reações nos apoios.



$$\rightarrow \sum F_x = 0, R_{Ax} - 6 = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 6 t$$

$$\curvearrowright \sum M_A = 0, 3 \cdot 2 - 8 \cdot 3 + R_B \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0 \Rightarrow R_B = 7,5 t$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, -3 + R_{Ay} - 8 + 7,5 - 2 = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 5,5 t$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Método do somatório / Equações diferenciais de equilíbrio – Exemplo 2.6

b - Determinar as funções da força cortante $V(x)$ e do momento fletor $M(x)$ para cada trecho da viga. (Partir da extremidade mais a esquerda, ponto C:)

Trecho C-A:

$$V(x) = -\int_0^x w(x) dx + C1$$

$$w(x) = ax + b \begin{cases} p/x = 0, w = -2 \Rightarrow b = -2 \\ p/x = 3, w = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$w(x) = \frac{2}{3}x - 2 \quad (\text{t/m})$$

$$V(x) = -\int_0^x \left(\frac{2}{3}x - 2 \right) dx + C1 \Rightarrow V(x) = -\frac{2}{3} \frac{x^2}{2} + 2x + C1 \quad (\text{t})$$

$$p/x = 0, V_c = 0 \Rightarrow C1 = 0 \quad (\text{não há força concentrada em C})$$

$$V(x) = -\frac{x^2}{3} + 2x$$

$$p/x = 3 \Rightarrow V_A = 3 \text{ t}$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Método do somatório / Equações diferenciais de equilíbrio – **Exemplo 2.6**

b - Determinar as funções da força cortante $V(x)$ e do momento fletor $M(x)$ para cada trecho da viga. (Partir da extremidade mais a esquerda, ponto C:)

Trecho C-A:

$$M(x) = -\int_0^x V(x) dx + C2 \Rightarrow M(x) = -\int_0^x \left(-\frac{2}{3} \frac{x^2}{2} + 2x \right) dx + C2$$

$$M(x) = -\left(-\frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + \frac{2}{2} x^2 \right) + C2$$

$$p/ x = 0 , M_c = 0 \Rightarrow C2 = 0 \text{ (não há momento concentrado em C)}$$

$$M(x) = \frac{x^3}{9} - x^2 \text{ (t.m)}$$

$$p/ x = 3 \Rightarrow M_A = -6 \text{ t.m}$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Método do somatório / Equações diferenciais de equilíbrio – Exemplo 2.6

b - Determinar as funções da força cortante $V(x)$ e do momento fletor $M(x)$ para cada trecho da viga. (Partir da extremidade mais a esquerda, ponto C:)

Trecho A-D:

$$V(x) = -\int_0^x w(x) dx + C1$$

$$\text{como } w(x) = 0 \Rightarrow V(x) = \text{constante} = C1 = -2,5 \text{ t}$$

$$M(x) = -\int_0^x V(x) dx + C2 \quad , \quad M(x) = -\int_0^x (-2,5) dx + C2 \Rightarrow M(x) = 2,5 x + C2$$

$$p/ x = 0 \quad , \quad M_A = -6 \Rightarrow C2 = -6 \quad (\text{n\~{o} h\~{a} momento concentrado em A})$$

$$M(x) = 2,5 x - 6 \quad (\text{t.m})$$

$$p/ x = 3 \Rightarrow M_D = 1,5 \text{ t} \cdot \text{m}$$

$$\text{for\~{c}a axial: } P = -6 \text{ t}$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Método do somatório / Equações diferenciais de equilíbrio – **Exemplo 2.6**

b - Determinar as funções da força cortante $V(x)$ e do momento fletor $M(x)$ para cada trecho da viga. (Partir da extremidade mais a esquerda, ponto C:)

Trecho D-B:

$$V(x) = -\int_0^x w(x) dx + C1$$

$$\text{como } w(x) = 0 \Rightarrow V(x) = \text{constante} = C1 = 5,5 \text{ t}$$

$$M(x) = -\int_0^x V(x) dx + C2 \quad , \quad M(x) = -\int_0^x 5,5 dx + C2 \Rightarrow M(x) = -5,5 x + C2$$

$$p/ x = 0 \quad , \quad M_D = 1,5 \Rightarrow C2 = 1,5 \quad (\text{n\~{o} h\~{a} momento concentrado em D})$$

$$M(x) = 5,5 x + 1,5 \quad (\text{t.m})$$

$$p/ x = 1 \Rightarrow M_B = -4 \text{ t.m}$$

$$\text{Força axial } P = 0$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Método do somatório / Equações diferenciais de equilíbrio – **Exemplo 2.6**

b - Determinar as funções da força cortante $V(x)$ e do momento fletor $M(x)$ para cada trecho da viga. (Partir da extremidade mais a esquerda, ponto C:)

Trecho B-E:

$$V(x) = -\int_0^x w(x) dx + C1$$

$$\text{como } w(x) = 0 \Rightarrow V(x) = \text{constante} = C1 = -2 \Rightarrow V = -2 t$$

$$M(x) = -\int_0^x V(x) dx + C2 \quad , \quad M(x) = -\int_0^x (-2) dx + C2 \Rightarrow M(x) = 2 x + C2$$

$$p/ x = 0 \quad , \quad M_B = -4 \Rightarrow C2 = -4 \quad (\text{não há momento concentrado em B})$$

$$M(x) = 2 x - 4 \quad (\text{t.m})$$

$$p/ x = 1 \Rightarrow M_E = -2 t . m$$

$$\text{Força axial } P = 0$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Método do somatório / Equações diferenciais de equilíbrio – **Exemplo 2.6**

b - Determinar as funções da força cortante $V(x)$ e do momento fletor $M(x)$ para cada trecho da viga. (Partir da extremidade mais a esquerda, ponto C:)

$$V(x) = -\int_0^x w(x) dx + C1 \quad , \quad V(x) = -\int_0^x (-1) dx + C1 \Rightarrow V(x) = x - C1$$

Trecho E-F:

$$p/ x = 0 \quad , \quad V_E = -2 \Rightarrow C1 = -2 \quad (\text{não há força concentrado em E})$$

$$V(x) = x - 2$$

$$p/ x = 2 \Rightarrow V_F = 0$$

$$M(x) = -\int_0^x V(x) dx + C2 \quad , \quad M(x) = -\int_0^x (x - 2) dx + C2 \Rightarrow M(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x + C2$$

$$p/ x = 0 \quad , \quad M_E = -2 \Rightarrow C2 = -2 \quad (\text{não há momento concentrado em E})$$

$$M(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x - 2 \quad (\text{t.m})$$

$$p/ x = 2 \Rightarrow M_F = 0 \text{ t.m}$$

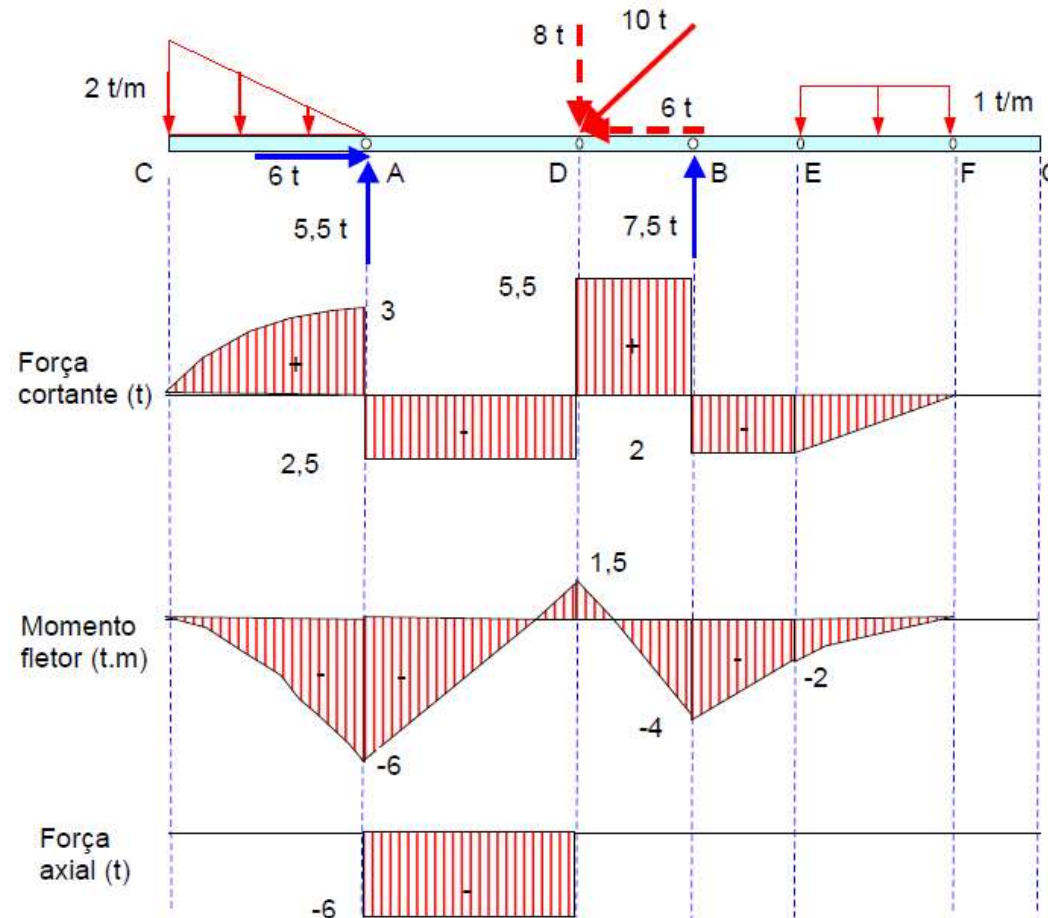
Força axial $P = 0$

não há forças e momentos concentrados: $V = 0$, $M = 0$, $P = 0$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Método do somatório / Equações diferenciais de equilíbrio – **Exemplo 2.6**

c - Traçar os diagramas de forças cortante e axial e de momento fletor.





Importante! Lista de Exercícios

Como reforço do aprendizado do conteúdo apresentado em sala de aula, são sugeridos os exercícios dispostos na lista abaixo. Bom estudo!

FERDINAND, P. B.; JOHNSTON JR, E. R; Resistência dos Materiais, Mc Graw-Hill

Resistência dos Materiais						
Capítulo						

Capítulo 3 – TENSÃO

- ≡ 3.1 – Definição de Tensão
- ≡ 3.2 – Tensor de Tensões
- ≡ 3.3 – Tensões em membros com carregamento axial
 - ≡ 3.3.1 – Carga axial
 - ≡ 3.3.2 – Tensão média de cisalhamento
- ≡ 3.4 – Tensões Admissíveis; Fator de segurança
- ≡ 3.5 – Projeto de membros e pinos com carregamento axial

3.1 – Definição de Tensão

Considere um o corpo seccionado, submetido à forças externas P_1 e P_2 e à forças internas ΔP atuantes em áreas infinitesimais ΔA , Fig.3.1.

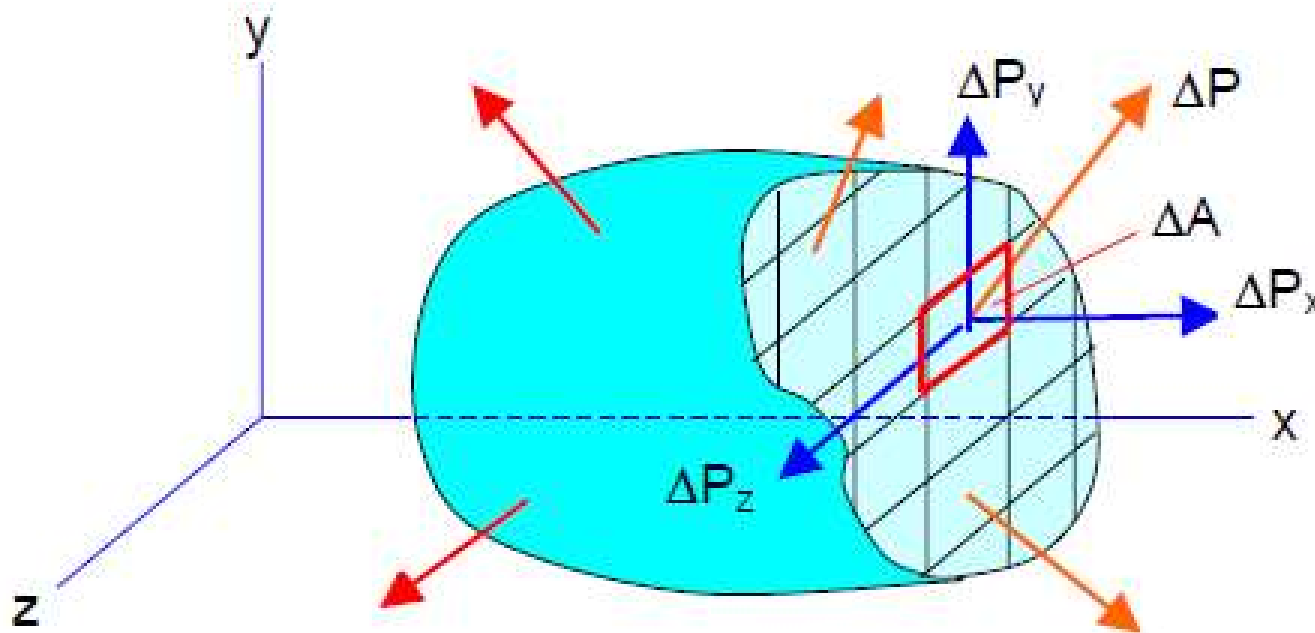


Figura 3.1 – Esforços externos e internos num corpo seccionado

3.1 – Definição de Tensão

A tensão normal à face seccionada é por definição da forma:

$$\tau_{xx} = \sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A}$$

e, as tensões de cisalhamento que atuam na face seccionada são por definição da forma:

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A}$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A}$$

O **primeiro índice** da tensão de cisalhamento indica **o eixo** que é perpendicular à face onde atua a tensão e o **segundo** indica **a direção** da tensão.

3.2 – Tensor de Tensões

Considere um elemento infinitesimal de dimensões Δx , Δy e Δz com todas as tensões que atuam sobre ele, Fig. 3.2.

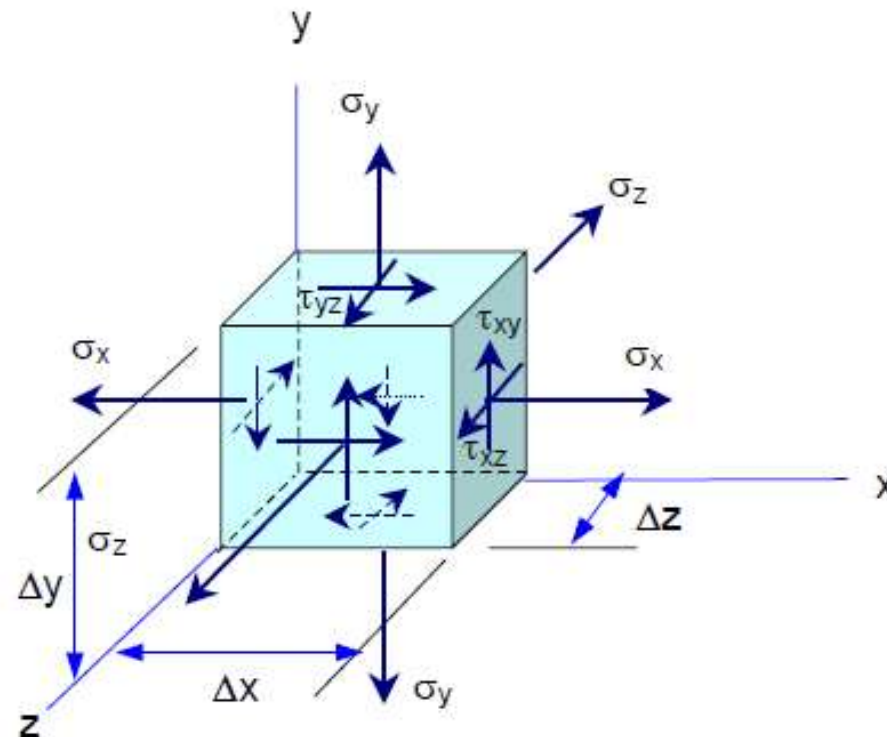


Figura 3.2 – Elemento infinitesimal sollicitado triaxialmente

3.2 – Tensor de Tensões

O tensor de tensões é uma matriz de dimensão (3x3) onde são colocadas todas as tensões atuantes num elemento infinitesimal:

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Verifica-se que o tensor de tensões é simétrico:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} , \tau_{zx} = \tau_{xz} , \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Demonstração:

$$\sum M_{\text{eixo } z} = 0 , (\tau_{yx} \cdot \Delta x \cdot \Delta z) \Delta y - (\tau_{xy} \cdot \Delta y \cdot \Delta z) \Delta x = 0 \Rightarrow \tau_{yx} = \tau_{xy}$$

3.3 – Tensões em membros com carregamento axial

3.3.1 – Carga axial

Considere uma barra sem peso e em equilíbrio, sujeita à duas forças F (tração ou compressão) em suas extremidades.

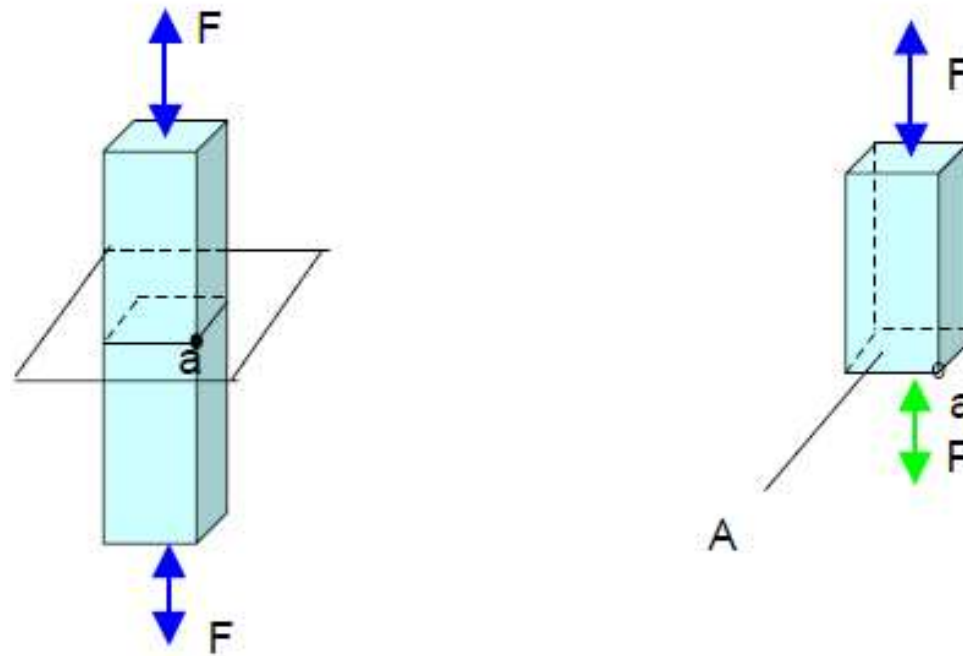


Figura 3.3 – Barra solicitada axialmente

3.3 – Tensões em membros com carregamento axial

3.3.1 – Carga axial

A área da seção transversal no ponto onde se seccionou a barra é A e a força interna é igual a P e positiva (se tracionada) ou negativa (se comprimida), logo a tensão normal é da forma:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

No caso da barra estar sendo comprimida, seu comprimento deve ser suficientemente pequeno para que não ocorra **flambagem**.

3.3 – Tensões em membros com carregamento axial

3.3.2 – Tensão média de cisalhamento

Considere um corpo sendo arrastado sobre outro corpo por uma P .

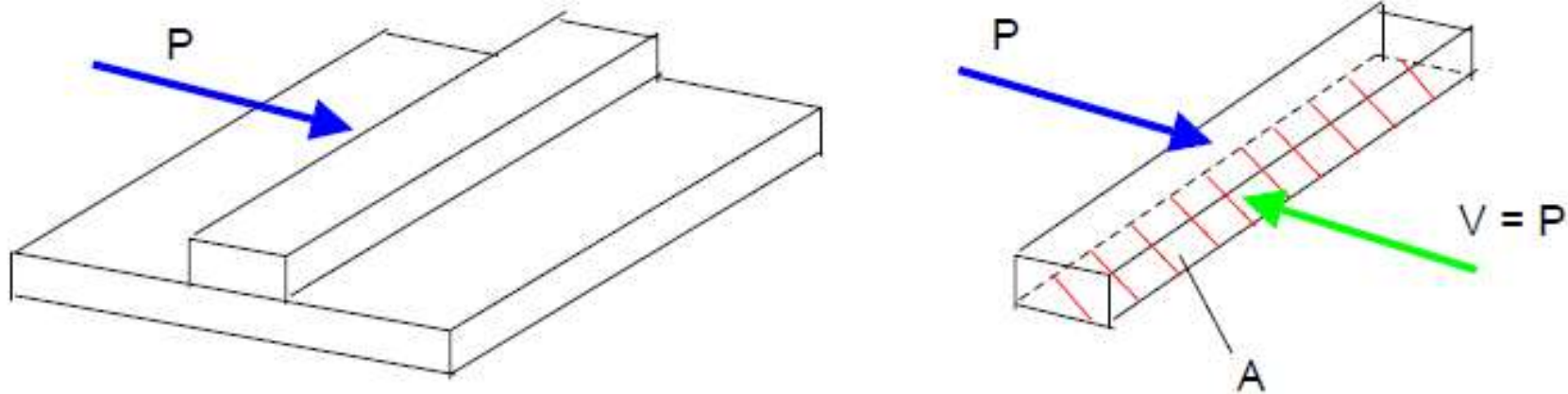


Figura 3.4 – Corpo sendo cisalhado

3.3 – Tensões em membros com carregamento axial

3.3.2 – Tensão média de cisalhamento

Se o corpo que está sendo arrastado tem área A na interface de contato entre os corpos, a tensão média de cisalhamento¹ é da forma:

$$\tau_m = \frac{V}{A} \quad (3.5)$$

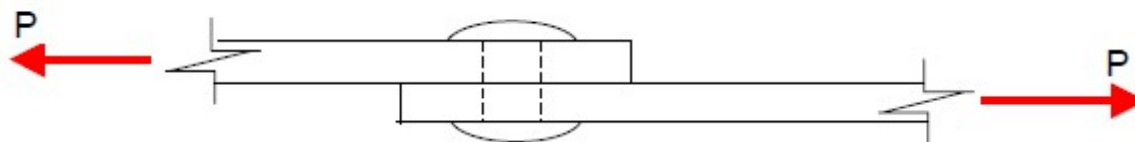
A eq. (3.5) é frequentemente utilizada para dimensionar pinos, parafusos, rebites, etc. que estão sendo solicitados por esforços cisalhantes.

¹ A tensão de cisalhamento é média pois a força que atua em cada área infinitesimal não é a mesma.

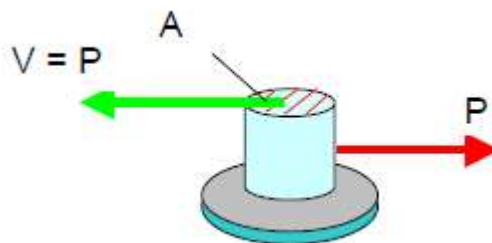
3.3 – Tensões em membros com carregamento axial

3.3.2 – Tensão média de cisalhamento

Corpos podem ser cisalhados de formas diferentes. Um corpo pode estar sendo submetido a um cisalhamento simples quando, Fig. 3.5:



O rebite que une os dois corpos que estão sendo tracionados é cisalhado na interface da seguinte forma, Fig. 3.6:



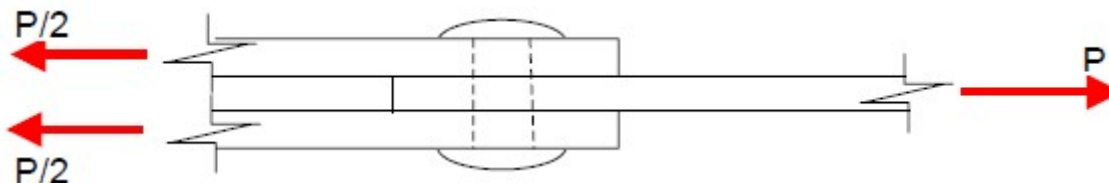
Se o rebite tem área A na interface e a força cortante V é P , a tensão de cisalhamento média é:

$$\tau_m = \frac{V}{A} = \frac{P}{A}$$

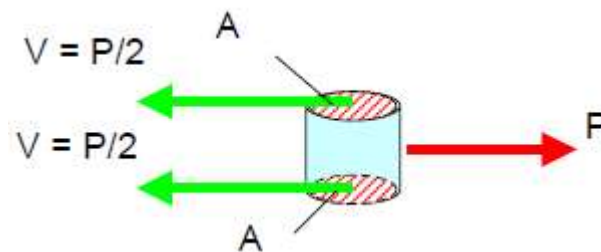
3.3 – Tensões em membros com carregamento axial

3.3.2 – Tensão média de cisalhamento

Um corpo pode estar sendo submetido à um cisalhamento duplo quando, Fig. 3.7:



O rebite que une os três corpos que estão sendo tracionados é cisalhado na interface entre cada corpo é da forma, Fig. 3.8:



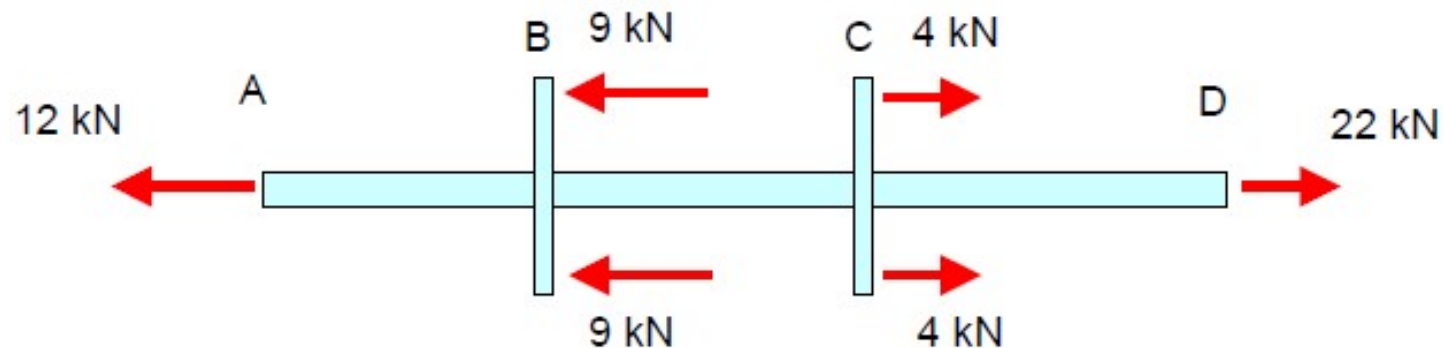
Se o rebite tem área A na interface entre cada corpo, e a força cortante V é $P/2$, a tensão de cisalhamento média é:

$$\tau_m = \frac{V}{A} = \frac{P}{2A}$$



Tensões em membros com carregamento axial – Exemplo 3.1

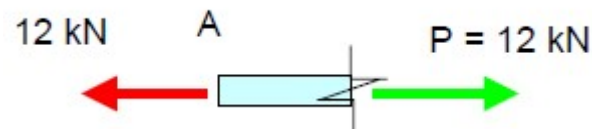
A barra abaixo tem largura de 35 mm e espessura de 10 mm, constantes ao longo de seu comprimento. Determine as tensões normais nos diferentes trechos da barra para o carregamento abaixo..





Tensões em membros com carregamento axial – Exemplo 3.1

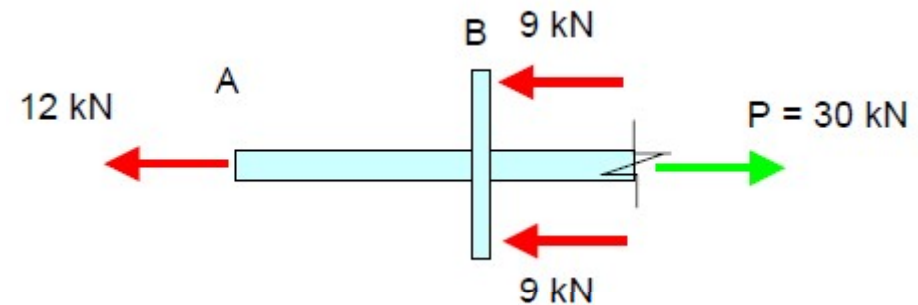
Trecho AB:



$$\sigma_{AB} = \frac{P}{A} = \frac{12000}{0,035 \cdot 0,010} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 34285714 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

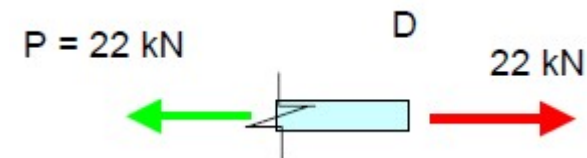
$$\sigma_{AB} = 34285714 \text{ Pa} = 34,3 \text{ MPa}$$

Trecho BC:



$$\sigma_{BC} = \frac{P}{A} = \frac{30000}{0,035 \cdot 0,010} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 85,7 \text{ MPa}$$

Trecho CD:

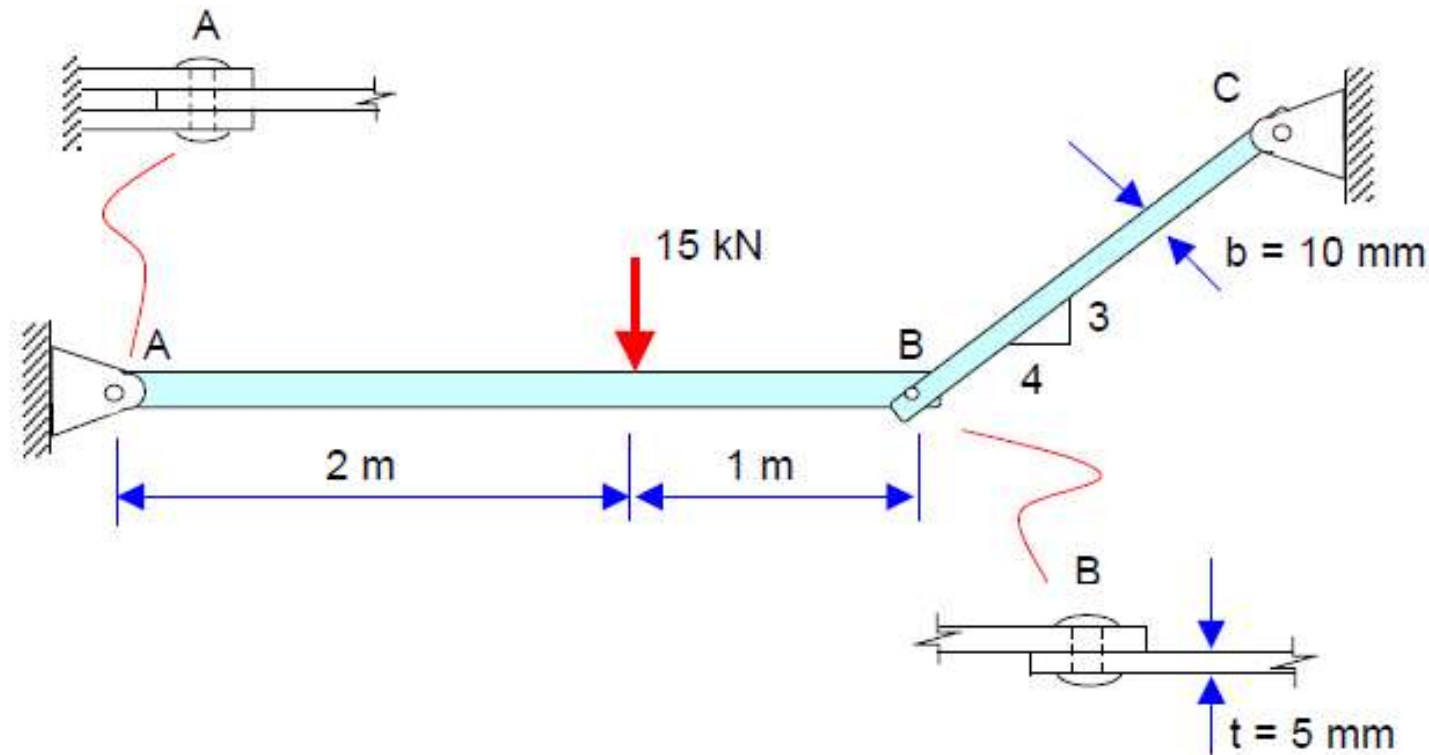


$$\sigma_{CD} = \frac{P}{A} = \frac{22000}{0,035 \cdot 0,010} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 62,4 \text{ MPa}$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Tensões em membros com carregamento axial – **Exemplo 3.2**

Determine as tensões nos pinos localizados em A e B com diâmetros $d=8\text{mm}$ e a tensão na barra BC para o conjunto abaixo:



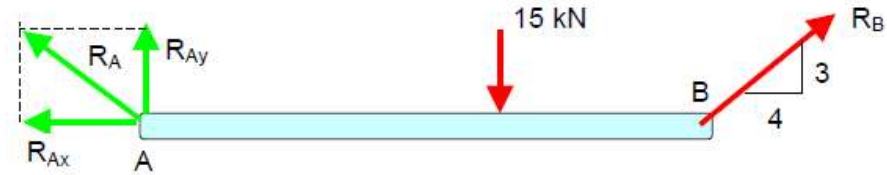


Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Tensões em membros com carregamento axial –

Exemplo 3.2

DCL da **Barra AB**:



$$\curvearrowleft \sum M_A = 0, \quad R_B \cdot \frac{3}{5} \cdot 3 - 15 \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_B = 16,7 \text{ kN}$$

$$\uparrow \sum F_Y = 0, \quad R_{Ay} - 15 + R_B \cdot \frac{3}{5} = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 5 \text{ kN}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad -R_{Ax} + R_B \cdot \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 13,4 \text{ kN}$$

Pino A: ?

Pino B: ?

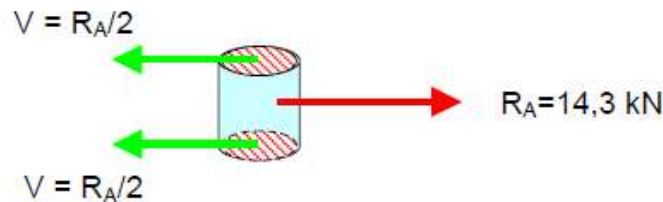
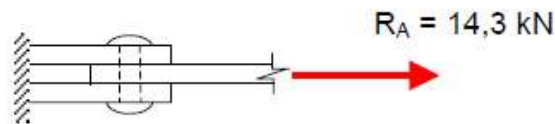


Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Tensões em membros com carregamento axial – Exemplo 3.2

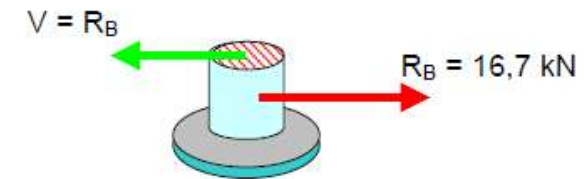
Pino A:

$$R_A = \sqrt{5^2 + 13,4^2} = 14,3 \text{ kN}$$



$$\tau_A = \frac{V}{A} = \frac{14300 / 2}{\frac{\pi 8^2}{4}} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_A = 142,2 \text{ MPa}$$

Pino B:



$$\tau_B = \frac{V}{A} = \frac{16700}{\frac{\pi 8^2}{4}} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_{BC} = 332,2 \text{ MPa}$$



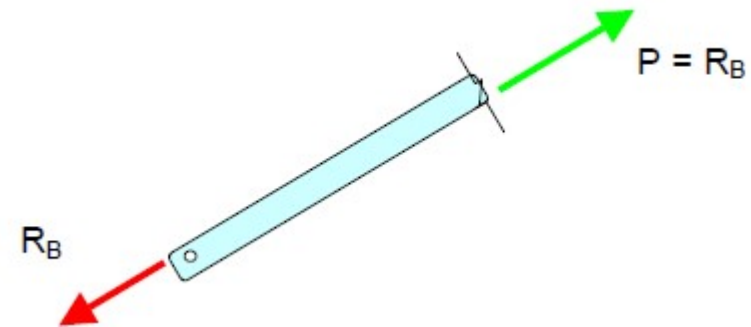
Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Tensões em membros com carregamento axial –

Exemplo 3.2

DCL da **Barra BC**:

$$\sigma_{BC} = \frac{P}{A} = \frac{16700 \text{ N}}{10,5 \text{ mm}^2} = 334 \text{ MPa}$$



3.4 – Tensões Admissíveis; Fator de segurança

Para garantir a segurança de uma estrutura, é necessário escolher uma tensão admissível que restrinja a carga aplicada, a uma que seja menor que aquela que a estrutura possa suportar. Há vários motivos para isso:

- ❑ imprecisão de cálculo,
- ❑ imperfeições oriundas do processo de fabricação,
- ❑ variabilidade nas propriedades mecânicas dos materiais,
- ❑ degradação do material, etc.

Uma das maneiras de especificar a tensão admissível é definir um coeficiente de segurança dado por:

$$\eta = \frac{\sigma_{\text{escoamento}}}{\sigma_{\text{admissível}}}$$

$$\eta = \frac{\sigma_{\text{ruptura}}}{\sigma_{\text{admissível}}}$$

** As tensões de ruptura são determinadas experimentalmente e o coeficiente de segurança é selecionado baseado no tipo de estrutura e em suas aplicações.

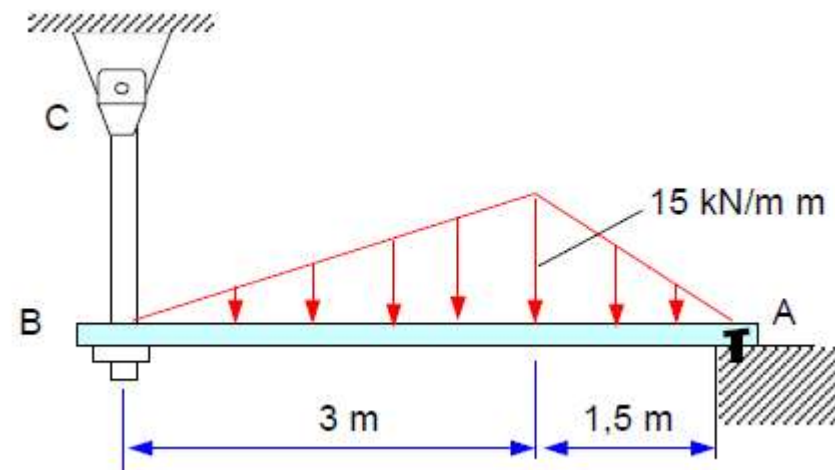
3.5 – Projeto de membros e pinos com carregamento axial

Os diagramas de esforços internos são traçados para se determinar o projeto de membros e pinos com carregamento axial.



Projeto de membros e pinos com carregamento axial – Exemplo 3.3

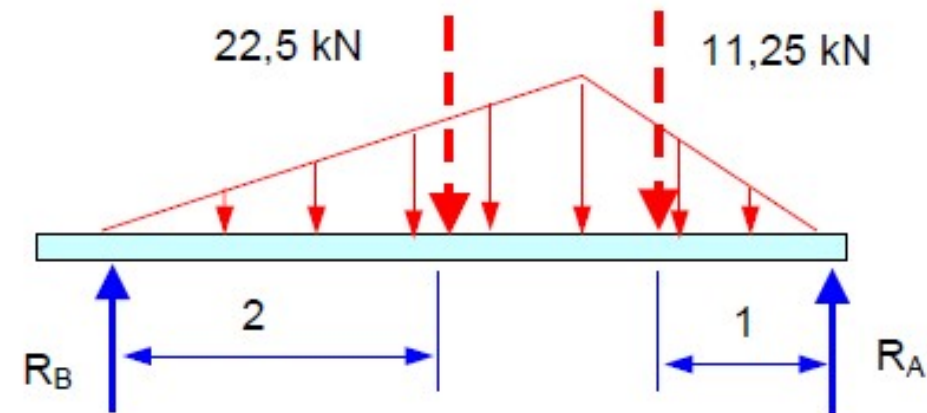
Exemplo 3.3: Determine o diâmetro da barra BC, se a tensão admissível é $\sigma_{adm} = 155 \text{ MPa}$. A viga é assumida ser parafusada em A.





Projeto de membros e pinos com carregamento axial – Exemplo 3.3

D.C.L da **barra AB**:



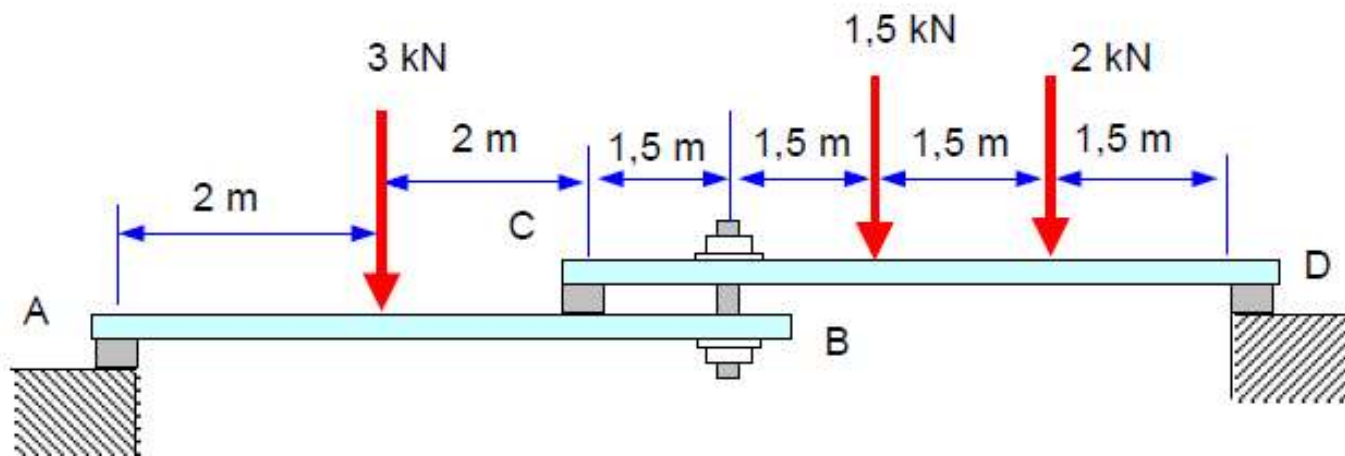
$$\sum M_A = 0 \quad , \quad -R_B \cdot 4,5 + 22,5 \cdot 2,5 + 11,25 \cdot 1 = 0 \Rightarrow R_B = 15 \text{ kN}$$

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{R_B}{A_{BC}} \quad , \quad 155 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \frac{15000}{\frac{\pi d_{BC}^2}{4}} \Rightarrow d_{BC} = 11,1 \text{ mm}$$



Projeto de membros e pinos com carregamento axial – Exemplo 3.4

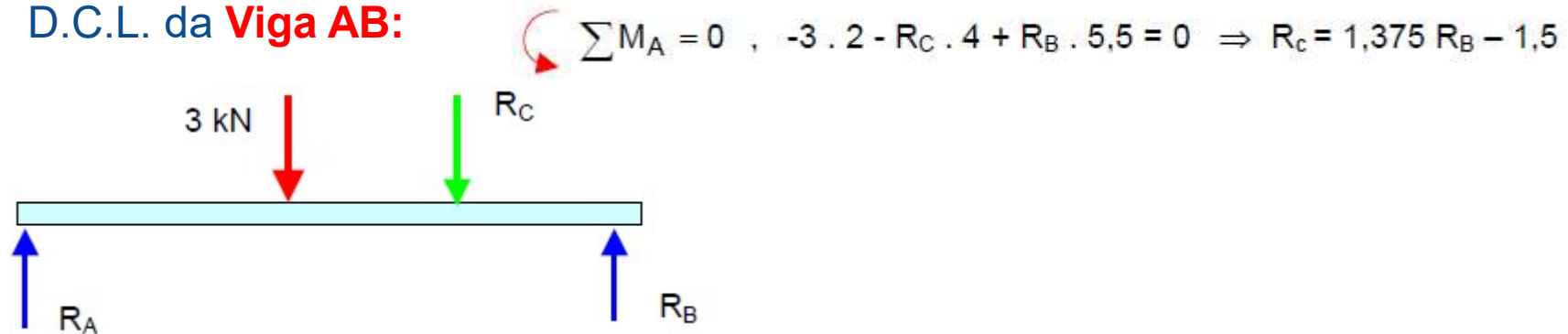
Duas vigas de madeira são conectadas por um parafuso em B. Assumindo que as conexões em A, B, C, e D exercem somente forças verticais nas vigas. Determine o diâmetro do parafuso em B e o diâmetro externo de sua arruela se a tensão admissível do parafuso é $\sigma_{adm.p.} = 150 \text{ MPa}$ e a tensão admissível da madeira é $\sigma_{adm.m.} = 26 \text{ MPa}$.



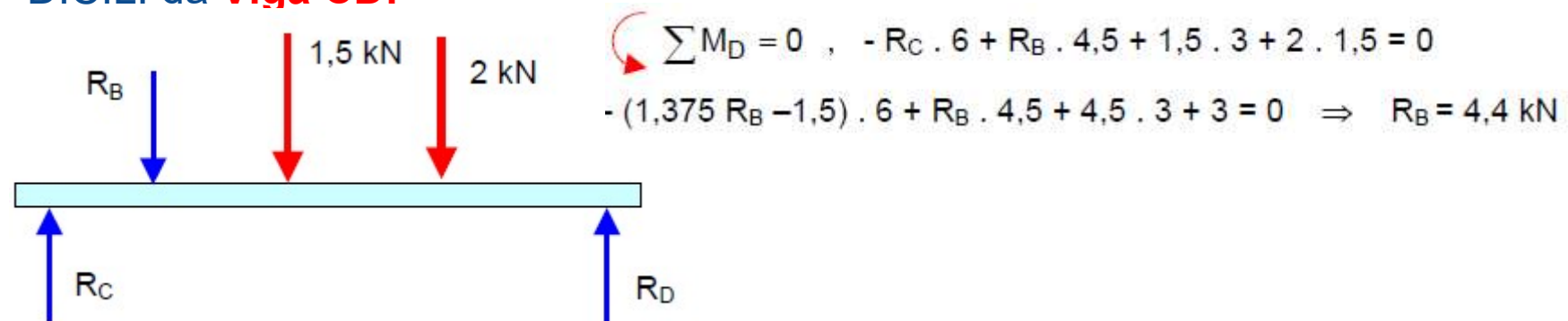


Projeto de membros e pinos com carregamento axial – Exemplo 3.4

D.C.L. da **Viga AB:**



D.C.L. da **Viga CD:**



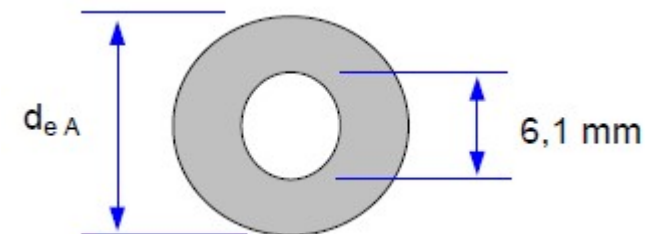


Projeto de membros e pinos com carregamento axial – Exemplo 3.4

Parafuso:

$$\sigma_{\text{adm P.}} = \frac{R_B}{\frac{\pi d_p^2}{4}}, \quad 150 = \frac{4400}{\frac{\pi d_p^2}{4}} \Rightarrow d_p = 6,1 \text{ mm}$$

Arruela:

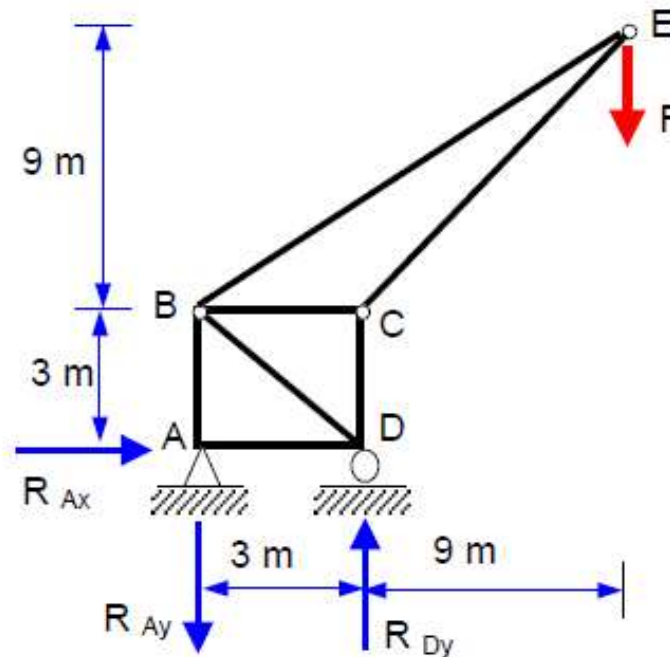


$$\sigma_{\text{adm m}} = \frac{R_B}{\frac{\pi d_{eA}^2}{4} - \frac{\pi d_p^2}{4}}, \quad 26 = \frac{4400}{\frac{\pi d_{eA}^2}{4} - \frac{\pi 6,1^2}{4}} \Rightarrow d_{eA} = 15,4 \text{ mm}$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Projeto de membros e estruturas – **Exemplo 3.5**

Determine a máxima força F que pode ser aplicada na estrutura se as áreas das seções transversais das barras são $A = 5000 \text{ mm}^2$ e a tensão admissível de tração é $\sigma_{\text{adm},t} = 14 \text{ kgf/mm}^2$ e a tensão admissível de compressão é $\sigma_{\text{adm},c} = 10,5 \text{ kgf/mm}^2$





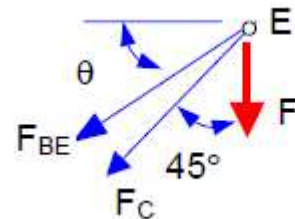
Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Projeto de membros e estruturas – **Exemplo 3.5**

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0$$

$$\curvearrowleft \sum M_A = 0, R_{Dy} \cdot 3 - F \cdot 12 = 0 \Rightarrow R_{Dy} = 4F$$

$$\uparrow \sum F_v = 0, -R_{Ay} + R_{Dy} - F = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 3F$$

Ponto E:



$$\cos \theta = \frac{4}{5}, \quad \sin \theta = \frac{3}{5}$$

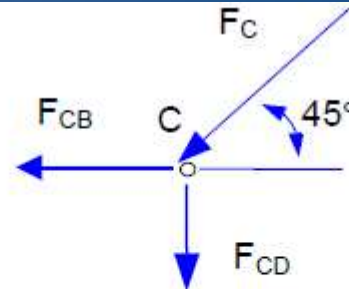
$$\uparrow \sum F_y = 0, -F - F_{CE} \cos 45 - F_{BE} \sin \theta = 0 \Rightarrow F_{ce} = -5,66 F \text{ (compress\~ao)}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0, -F_{BE} \cos \theta - F_{CE} \sin 45 = 0 \Rightarrow F_{be} = 5 F \text{ (tra\~c\~ao)}$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Projeto de membros e estruturas – **Exemplo 3.5**

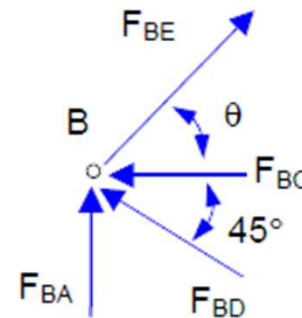
Ponto C:



$$\uparrow \sum F_y = 0, F_{CD} - F_{CE} \sin 45 = 0 \Rightarrow F_{CD} = -4 F \text{ (compressão)}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0, F_{CB} - F_{CE} \cos 45 = 0 \Rightarrow F_{cb} = -4 F \text{ (compressão)}$$

Ponto B:



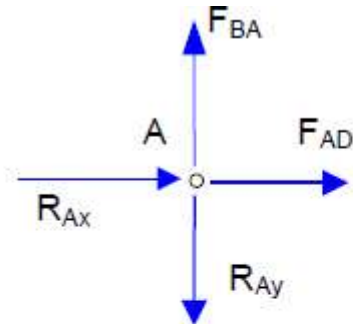
$$\rightarrow \sum F_x = 0, -F_{BD} \cos 45 - F_{BC} + F_{BE} \cos \theta = 0 \Rightarrow F_{BD} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, F_{BA} + F_{BE} \sin \theta = 0 \Rightarrow F_{BA} = -3 F \text{ (tração)}$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Projeto de membros e estruturas – **Exemplo 3.5**

Ponto A:



$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad R_{Ax} + F_{AD} = 0 \Rightarrow F_{AD} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad -R_{Ay} + F_{BA} = 0 \Rightarrow F_{BA} = 3F \text{ (tração)}$$

barra CE:

$$\sigma_{adm c} = \frac{F_{CE}}{A}, \quad 10,5 = \frac{5,66 F}{5000}, \quad F = 9.276 \text{ kgf}$$

barra BE:

$$\sigma_{adm t} = \frac{F_{BE}}{A}, \quad 14 = \frac{5 F}{5000}, \quad F = 14.000 \text{ kgf}$$

barra CD:

$$\sigma_{adm c} = \frac{F_{CD}}{A}, \quad 10,5 = \frac{4 F}{5000}, \quad F = 13.125 \text{ kgf}$$

barra CB:

$$\sigma_{adm c} = \frac{F_{CB}}{A}, \quad 10,5 = \frac{4 F}{5000}, \quad F = 13.125 \text{ kgf}$$

barra BA:

$$\sigma_{adm t} = \frac{F_{BA}}{A}, \quad 14 = \frac{3 F}{5000}, \quad F = 23.333 \text{ kgf}$$

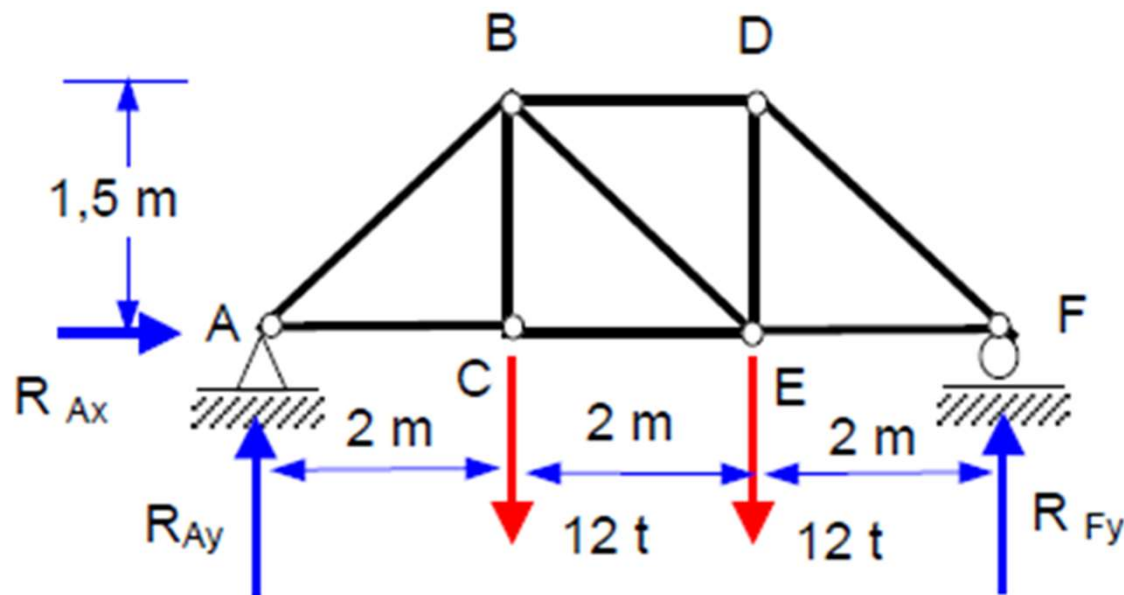


Resposta: A máxima força F é a de $F = 9.276 \text{ kgf}$, pois qualquer força maior que está produziria uma tensão superior a tensão admissível.



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Projeto de membros e estrutura treliçada – Exemplo 3.6

A estrutura treliçada abaixo suporta duas forças de 12 t. Se as tensões admissíveis são $\sigma_{adm,t} = 14 \text{ kgf/mm}^2$ em tração e $\sigma_{adm,c} = 10,5 \text{ kgf/mm}^2$ em compressão, determine a menor seção transversal possível para as barras.





Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

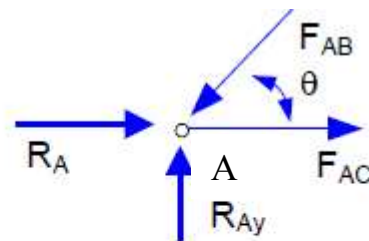
Projeto de membros e estrutura treliçada – Exemplo 3.6

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0$$

$$\curvearrowleft \sum M_A = 0, R_{Fy} \cdot 6 - 12 \cdot 4 - 12 \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_{Fy} = 12 \text{ t}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, R_{Ay} + R_{Fy} - 12 - 12 = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 12 \text{ t}$$

Ponto A:



$$\cos \theta = \frac{2}{2,5}, \quad \text{sen } \theta = \frac{1,5}{2,5}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, R_{Ay} - F_{AB} \text{ sen } \theta = 0 \Rightarrow F_{AB} = 20 \text{ t (compressão)}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0, R_{Ax} - F_{AB} \cos \theta + F_{AC} = 0 \Rightarrow F_{AC} = 16 \text{ t (tração)}$$

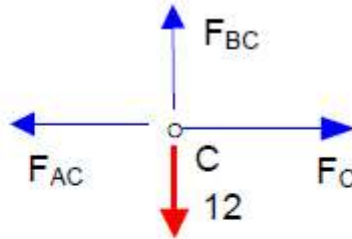


Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Projeto de membros e estrutura treliçada –

Exemplo 3.6

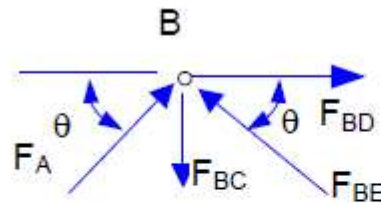
Ponto C:



$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad , \quad F_{BC} - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 12 \text{ t (tração)}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \quad , \quad -F_{AC} + F_{CE} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CE} = 16 \text{ t (tração)}$$

Ponto B:



$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad , \quad F_{AB} \sin \theta - F_{BC} + F_{BE} \sin \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BE} = 0 \text{ t}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \quad , \quad F_{AB} \cos \theta - F_{BE} \cos \theta + F_{BD} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BD} = -16 \text{ t (compressão)}$$

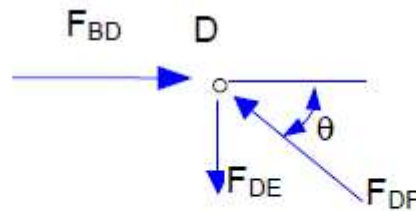


Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Projeto de membros e estrutura treliçada –

Exemplo 3.6

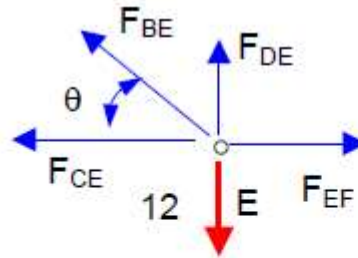
Ponto D:



$$\rightarrow \sum F_x = 0, F_{BD} - F_{DF} \cos \theta = 0 \Rightarrow F_{DF} = 20 \text{ t (compressão)}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, -F_{DE} + F_{DF} \sin \theta = 0 \Rightarrow F_{DE} = 12 \text{ t (tração)}$$

Ponto E:



$$\uparrow \sum F_y = 0, -12 + F_{DE} + F_{BE} \sin \theta = 0 \quad (\text{ok})$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0, -F_{CE} - F_{BE} \cos \theta + F_{EF} = 0 \Rightarrow F_{EF} = 16 \text{ t (tração)}$$

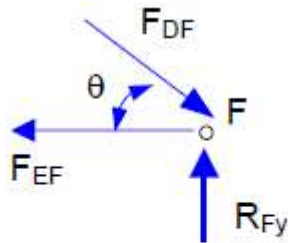


Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Projeto de membros e estrutura treliçada –

Exemplo 3.6

Ponto F:



$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad , \quad R_{Fy} - F_{DF} \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (\text{ok})$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \quad , \quad -F_{EF} + F_{DF} \operatorname{cos} \theta = 0 \quad (\text{ok})$$

barra AB:

$$\sigma_{\text{adm c}} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}} \quad , \quad 10,5 = \frac{20 \cdot 10^3}{A_{AB}} \quad , \quad A_{AB} = 1904,8 \text{ mm}^2$$

barra AC:

$$\sigma_{\text{adm t}} = \frac{F_{AC}}{A_{AC}} \quad , \quad 14 = \frac{16 \cdot 10^3}{A_{AC}} \quad , \quad A_{AC} = 1142,9 \text{ mm}^2$$

barra BC:

$$\sigma_{\text{adm t}} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} \quad , \quad 14 = \frac{12 \cdot 10^3}{A_{BC}} \quad , \quad A_{BC} = 857,2 \text{ mm}^2$$

barra CE:

$$\sigma_{\text{adm t}} = \frac{F_{CE}}{A_{CE}} \quad , \quad 14 = \frac{16 \cdot 10^3}{A_{CE}} \quad , \quad A_{CE} = 1142,9 \text{ mm}^2$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Projeto de membros e estrutura treliçada – Exemplo 3.6

barra BD:

$$\sigma_{\text{adm c}} = \frac{F_{\text{BD}}}{A_{\text{BD}}}, \quad 10,5 = \frac{16 \cdot 10^3}{A_{\text{BD}}}, \quad A_{\text{BD}} = 1523,8 \text{ mm}^2$$

barra DF:

$$\sigma_{\text{adm c}} = \frac{F_{\text{DF}}}{A_{\text{DF}}}, \quad 10,5 = \frac{20 \cdot 10^3}{A_{\text{DF}}}, \quad A_{\text{DF}} = 1904,8 \text{ mm}^2$$

barra DE:

$$\sigma_{\text{adm t}} = \frac{F_{\text{DE}}}{A_{\text{DE}}}, \quad 14 = \frac{12 \cdot 10^3}{A_{\text{DE}}}, \quad A_{\text{DE}} = 857,2 \text{ mm}^2$$

barra EF:

$$\sigma_{\text{adm t}} = \frac{F_{\text{EF}}}{A_{\text{EF}}}, \quad 14 = \frac{16 \cdot 10^3}{A_{\text{EF}}}, \quad A_{\text{EF}} = 1142,9 \text{ mm}^2$$



Resposta: A menor área possível é a de 1.904,8 mm², pois qualquer área menor que esta produziria uma tensão superior a tensão admissível.



Importante! Lista de Exercícios

Como reforço do aprendizado do conteúdo apresentado em sala de aula, são sugeridos os exercícios dispostos na lista abaixo. Bom estudo!

FERDINAND, P. B.; JOHNSTON JR, E. R; Resistência dos Materiais, Mc Graw-Hill

Resistência dos Materiais						
Capítulo						

Capítulo 4 – DEFORMAÇÃO

- ≡ 4.1 – Significado físico da deformação
- ≡ 4.2 – Definição matemática de deformação
- ≡ 4.3 – Propriedades mecânicas dos materiais isotrópicos
 - ≡ 4.3.1 – Diagrama tensão-deformação
 - ≡ 4.3.2 – Coeficiente de poisson para materiais isotrópicos
 - ≡ 4.3.3 – Lei de Hooke para materiais isotrópicos (Triaxial de tensões)
- ≡ 4.4 – Energias de deformação elástica
 - ≡ 4.4.1 – Energia de deformação elástica para tensão uniaxial
 - ≡ 4.4.2 – Energia de deformação elástica para tensão de cisalhamento
 - ≡ 4.4.3 – Energia de def. elástica para estado de tensão multiaxial
- ≡ 4.5 – Deformação de membros carregados axialmente
- ≡ 4.6 – Tensões Residuais

4.1 – Significado físico da deformação

Um corpo sólido se deforma quando sujeito à mudanças de temperatura ou a uma carga externa, como mostrado abaixo.

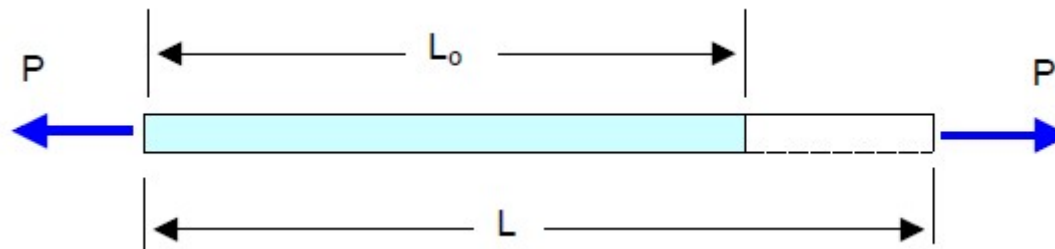


Figura 4.1 – Representação gráfica da deformação linear

Se L_0 é o comprimento inicial e L é o comprimento final do corpo sob tração, o alongamento é $\Delta L = L - L_0$ e o alongamento por unidade de comprimento, chamado deformação linear, é definido como:

$$\varepsilon = \int_0^L \frac{dL}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0}$$

4.2 – Definição matemática de deformação

Considere dois pontos localizados em uma direção x de um corpo sólido na qual uma deformação linear está sendo considerada.

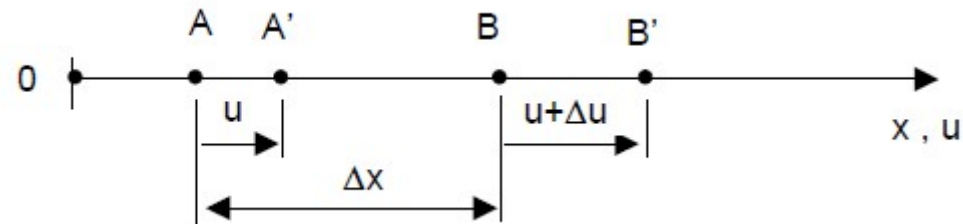


Figura 4.2 – Representação matemática da deformação linear

Assim a definição de deformação linear no ponto A quando $\Delta x \rightarrow 0$ é definida como:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$



Se $\varepsilon > 0$ = **Alongação** e $\varepsilon < 0$ = **Contração**

4.2 – Definição matemática de deformação

Se o corpo se deforma em três direções ortogonais x , y , e z e u , v , e w são as três componentes do deslocamento nestas direções, as deformações lineares são respectivamente:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Além da deformação linear, um corpo pode sofrer uma deformação angular, como mostrado na Fig. 4.3.

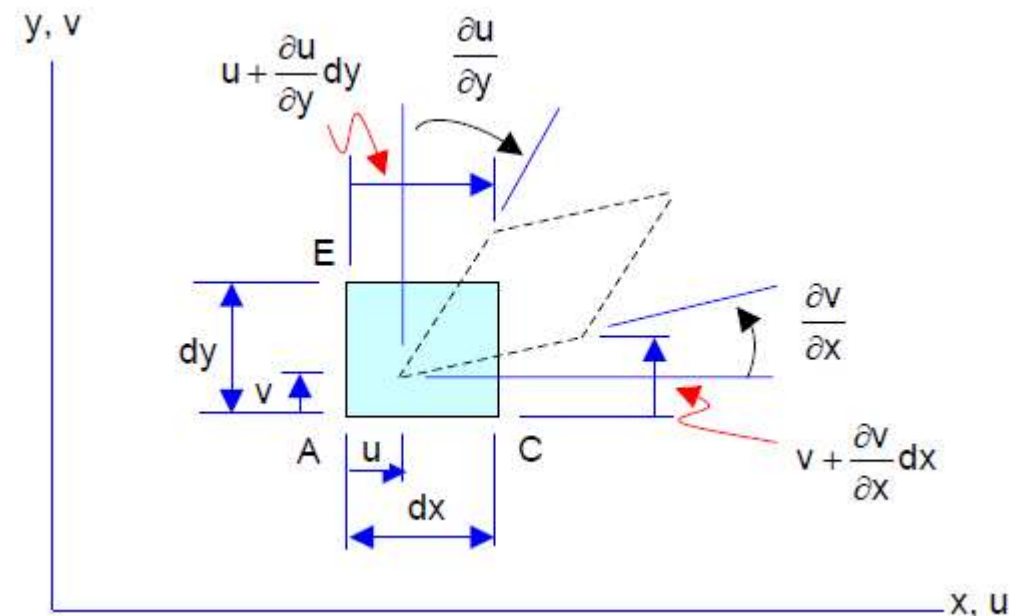


Figura 4.3 – Representação gráfica da deformação angular

4.2 – Definição matemática de deformação

Assim, para pequenas mudanças de ângulo, a deformação angular associada ao plano xy é definida por:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Se o corpo se deforma em mais planos ortogonais xz e yz , as deformações angulares nestes planos são:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

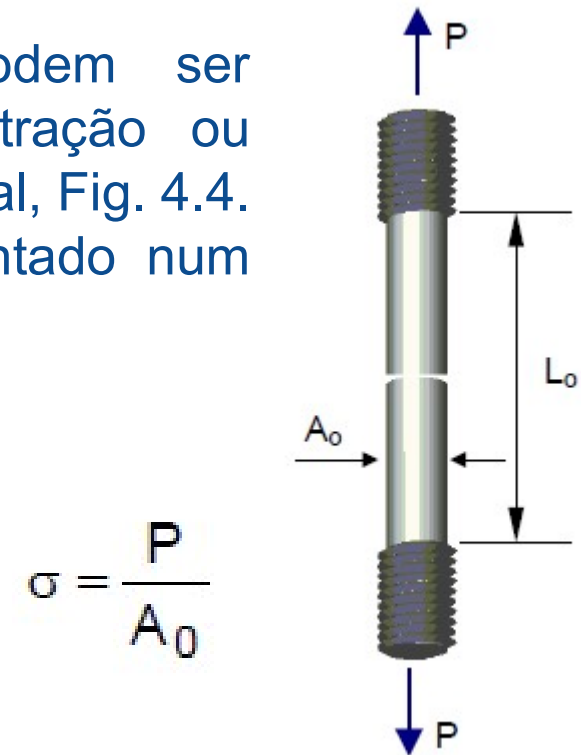
4.3 – Propriedades mecânicas dos materiais isotrópicos

4.3.1 – Diagrama tensão-deformação

Muitas propriedades de um material podem ser determinadas a partir de um ensaio de tração ou compressão, a partir de uma amostra do material, Fig. 4.4. O resultado desse ensaio pode ser representado num diagrama tensão-deformação.

□ O diagrama tensão-deformação é executado num corpo-de-prova padronizado, tendo como dimensões originais, a seção transversal A_0 e o comprimento L_0 . A tensão considerada no diagrama é a força aplicada P na seção transversal original A_0 :

□ Da mesma forma, a deformação é obtida diretamente da leitura do extensômetro, ou pela divisão da variação de comprimento ΔL pelo comprimento original L_0 .



$$\sigma = \frac{P}{A_0}$$

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Figura 4.4

4.3 – Propriedades mecânicas dos materiais isotrópicos

4.3.1 – Diagrama tensão-deformação

O diagrama tensão-deformação é o gráfico dos correspondentes valores de σ e ϵ , onde o eixo das ordenadas representa as tensões σ e o eixo das abcissas representa as deformações ϵ . É importante ressaltar que dois diagramas de dois corpos- de-prova de um mesmo material não são exatamente idênticos, pois os resultados dependem de várias variáveis como, composição do material, imperfeições microscópicas, fabricação, velocidade de aplicação da carga e temperatura do ensaio.

4.3 – Propriedades mecânicas dos materiais isotrópicos

4.3.1 – Diagrama tensão-deformação

A Fig. 4.5 apresenta um diagrama tensão-deformação de um aço usualmente utilizado na engenharia, no qual pode-se distinguir diferentes regiões.

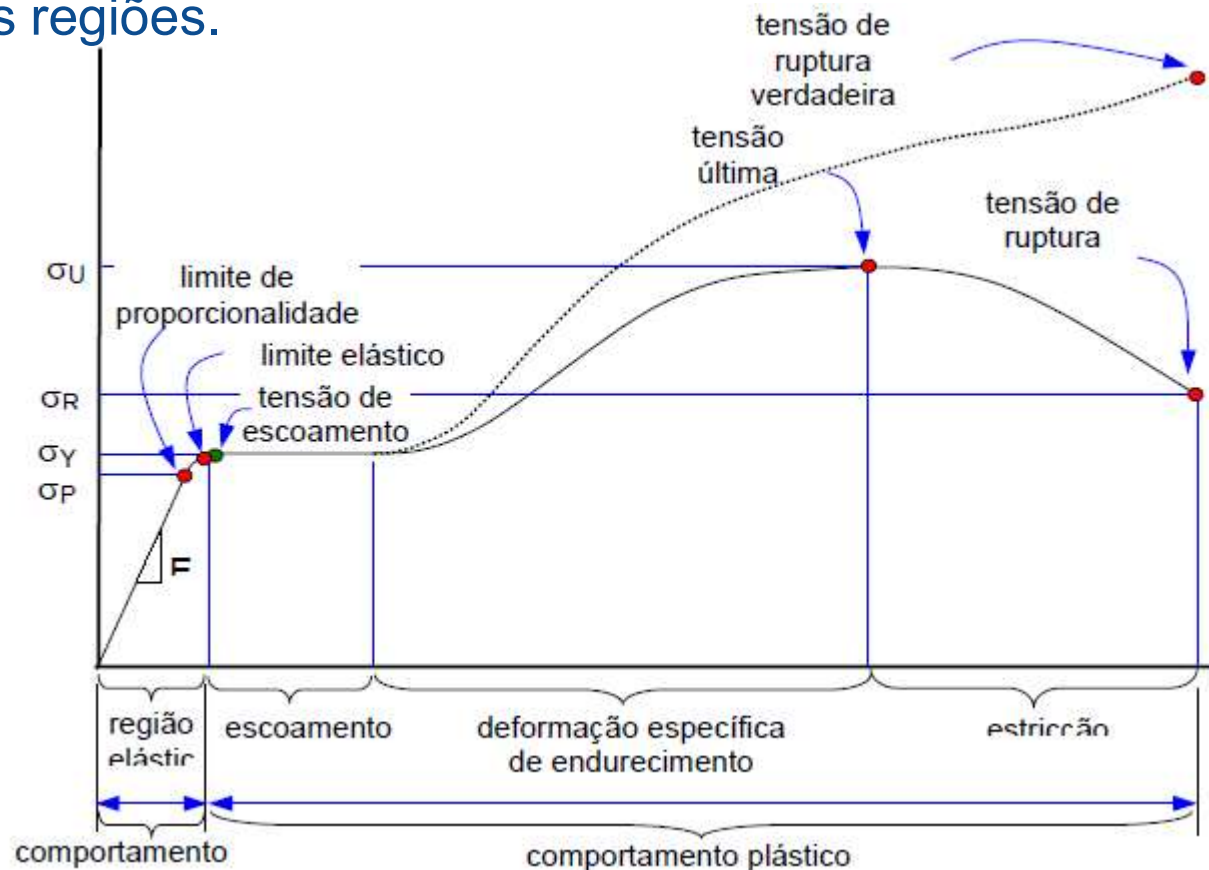


Figura 4.5 – Diagrama tensão-deformação em um ensaio de tração

4.3 – Propriedades mecânicas dos materiais isotrópicos

4.3.1 – Diagrama tensão-deformação

O comportamento do corpo-de-prova pode ser de diferentes formas, dependendo da intensidade da carga aplicada e do seu grau de deformação.

□ **Comportamento elástico:** Quando o corpo-de-prova retorna à sua forma original quando a carga aplicada é removida. O material é considerado linearmente elástico até o limite superior da tensão, chamado de limite de proporcionalidade, σ_p . Até esse limite de proporcionalidade, a lei de Hooke, que relaciona a tensão σ com a deformação ε pelo módulo de elasticidade E do material é válida:

$$\sigma = E \varepsilon$$

4.3 – Propriedades mecânicas dos materiais isotrópicos

4.3.1 – Diagrama tensão-deformação

O material pode ainda se comportar elasticamente até o limite elástico, mesmo se exceder ligeiramente este limite de proporcionalidade. Neste caso porém, o comportamento **não é mais linear**.

□ **Escoamento:** Um leve aumento na tensão, acima do limite elástico, resultará numa acomodação do material causando uma deformação permanente. A tensão que causa o escoamento é chamada de tensão de escoamento, σ_y . Neste caso, mesmo se a carga for removida, o corpo-de-prova continuará deformado. O corpo-de-prova poderá continuar a se alongar mesmo sem qualquer aumento de carga. Nesta região, o material é denominado perfeitamente plástico.

4.3 – Propriedades mecânicas dos materiais isotrópicos

4.3.1 – Diagrama tensão-deformação

□ **Deformação específica por endurecimento:** Se ao término do escoamento, uma carga adicional for aplicada ao corpo-de-prova, a tensão continuará a aumentar com a deformação específica continuamente até atingir um valor de tensão máxima, referida por tensão última, σ_U . Durante a execução do ensaio nesta região, enquanto o corpo-de-prova é alongado, sua área da seção transversal diminui ao longo de seu comprimento nominal, até o ponto que a deformação corresponda a tensão última.

4.3 – Propriedades mecânicas dos materiais isotrópicos

4.3.1 – Diagrama tensão-deformação

□ **Estricção:** Ao atingir a tensão última, a área da seção transversal começa a diminuir em uma região localizada do corpo-de-prova, e não mais ao longo do seu comprimento nominal. Este fenômeno é causado pelo deslizamento de planos no interior do material e as deformações reais produzidas pela tensão cisalhante (*necking*), Fig. 4.6. Uma vez que a área da seção transversal diminui constantemente, esta área só pode sustentar uma carga menor. Assim, o diagrama tensão-deformação tende a curvar-se para baixo até a ruptura do corpo-de-prova com uma tensão de ruptura, σ_R .

4.3 – Propriedades mecânicas dos materiais isotrópicos

4.3.1 – Diagrama tensão-deformação

A área sob a curva tensão-deformação representa a energia de deformação absorvida pelo material. Quando a tensão atinge o limite de proporcionalidade, σ_p , a energia de deformação é denominada módulo de resiliência. Quando a tensão atingir a tensão de ruptura, σ_R , a energia de deformação é denominada de tenacidade. Os materiais com alta tenacidade são os mais utilizados em projetos estruturais, pois materiais com baixa tenacidade podem romper subitamente sem dar sinais de um rompimento iminente.



Figura 4.6 – Estricção da seção transversal do corpo-de-prova



Diagrama tensão-deformação de um material – Exemplo 4.1

O diagrama tensão-deformação de um material é mostrado abaixo. Se um corpo-de-prova é carregado até 600 MPa, determine a deformação permanente remanescente quando o corpo é descarregado. Calcule também o módulo de resiliência antes e após a aplicação do carregamento.

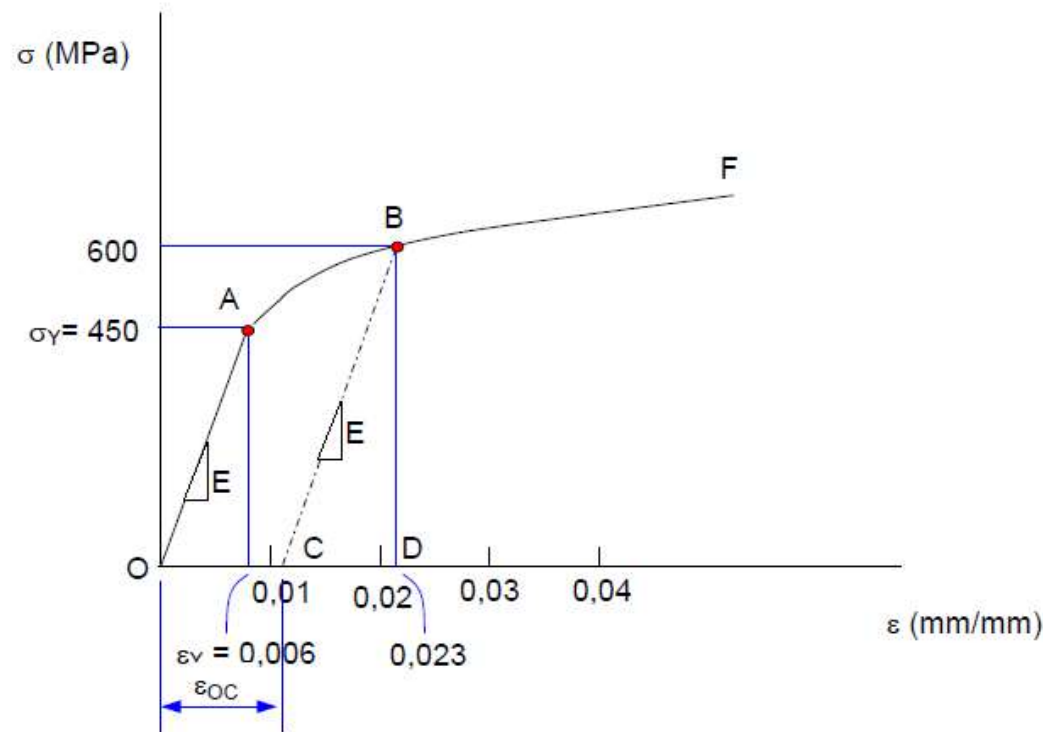




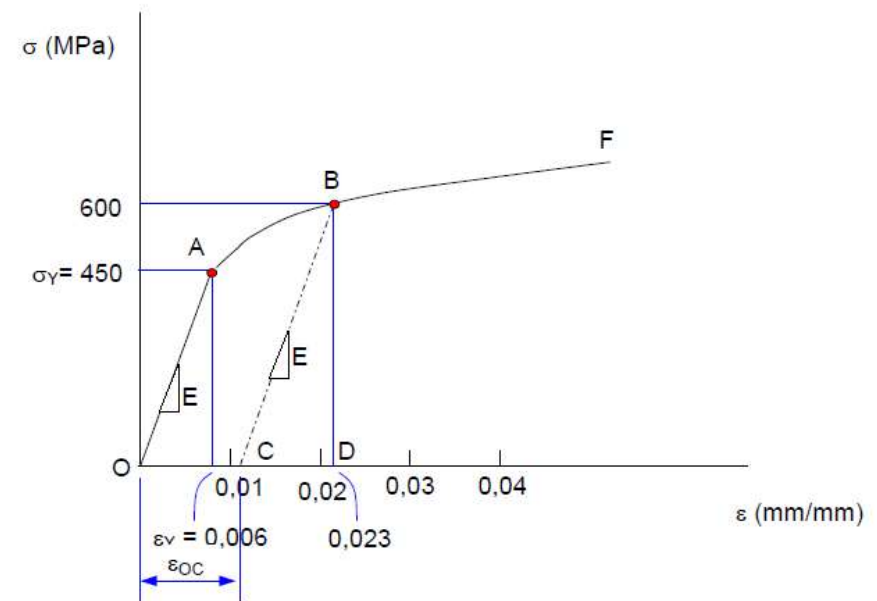
Diagrama tensão-deformação de um material – Exemplo 4.1

O módulo de elasticidade E é obtido pela inclinação da reta OA:

$$E = \frac{\sigma_Y}{\varepsilon_Y} = \frac{450 \text{ MPa}}{0,006 \text{ mm/mm}} = 75 \text{ GPa}$$

Do triângulo CBD, temos:

$$E = \frac{BD}{CD} = \frac{600 \text{ MPa}}{CD} = 75 \text{ GPa} \Rightarrow CD = 0,008 \text{ mm/mm}$$



A deformação dada pelo segmento CD é a deformação elástica recuperada. A deformação permanente, ε_{OC} , é portanto:

$$\varepsilon_{OC} = 0,023 - 0,008 = 0,0150 \text{ mm/mm}$$

4.3 – Propriedades mecânicas dos materiais isotrópicos

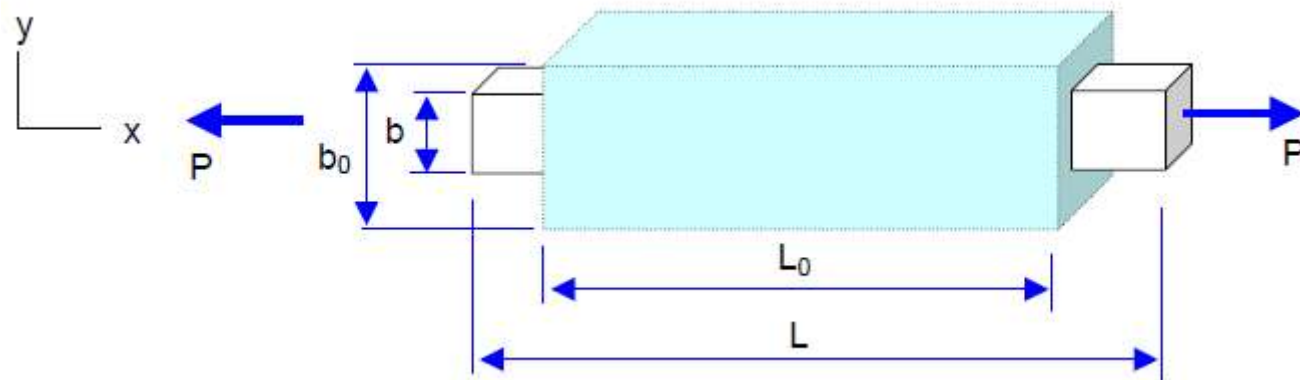
4.3.2 – Coeficiente de Poisson para materiais isotrópicos

Considere um corpo sólido submetido à uma força axial como mostra a Fig. 4.7. Pela definição, a deformação axial do corpo é da forma:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0}$$

e, a deformação lateral do corpo é da forma:

$$\epsilon_y = \frac{\Delta b}{b_0}$$



A relação entre o valor da deformação lateral e a deformação axial é conhecida como coeficiente de Poisson:

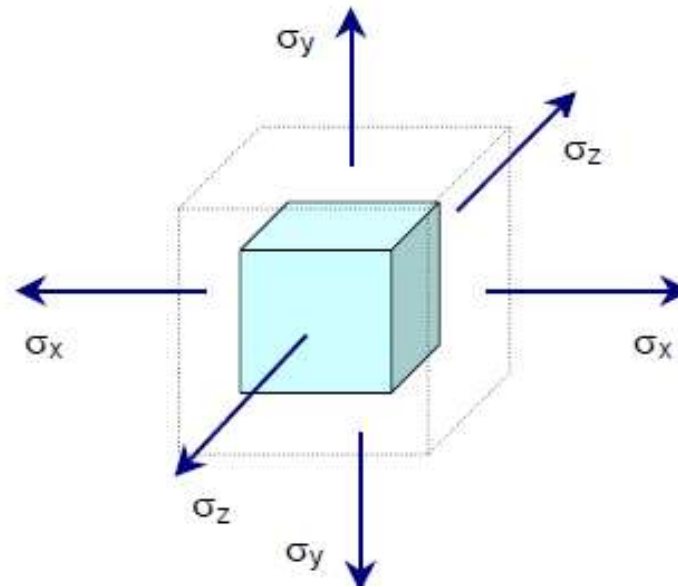
$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$$

4.3 – Propriedades mecânicas dos materiais isotrópicos

4.3.3 – Lei de Hooke para materiais isotrópicos (Estado triaxial de tensões)

Considere um corpo submetido à um estado triaxial de tensões

σ_x , σ_y e σ_z .



O estado triaxial de tensões pode ser considerado como a superposição de três estados de tensão uniaxial analisados separadamente:

4.3 – Propriedades mecânicas dos materiais isotrópicos

4.3.3 – Lei de Hooke para materiais isotrópicos (Estado triaxial de tensões)

O estado triaxial de tensões pode ser considerado como a superposição de três estados de tensão uniaxial analisados separadamente:

1. Deformações devido à σ_x :

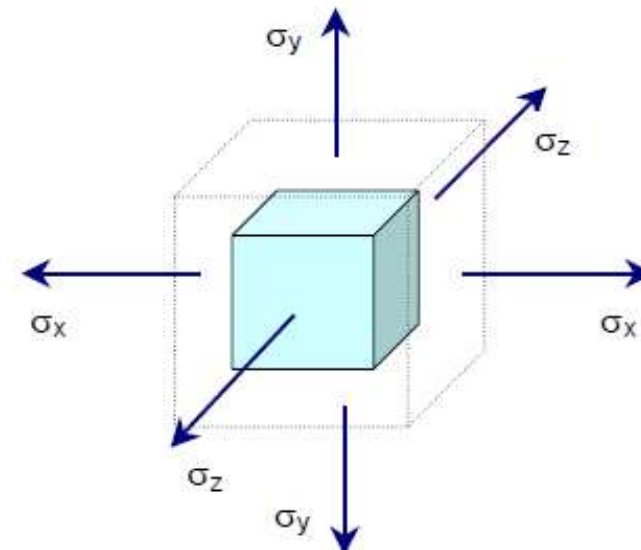
$$\varepsilon'_x, \varepsilon'_y = -\nu \varepsilon'_x, \varepsilon'_z = -\nu \varepsilon'_x$$

2. Deformações devido à σ_y :

$$\varepsilon''_y, \varepsilon''_x = -\nu \varepsilon''_y, \varepsilon''_z = -\nu \varepsilon''_y$$

3. Deformações devido à σ_z :

$$\varepsilon'''_z, \varepsilon'''_x = -\nu \varepsilon'''_z, \varepsilon'''_y = -\nu \varepsilon'''_z$$



$$\varepsilon_x = \varepsilon'_x + \varepsilon''_x + \varepsilon'''_x = \varepsilon'_x - \nu \varepsilon''_y - \nu \varepsilon'''_z$$

Superpondo todas as deformações: $\varepsilon_y = \varepsilon'_y + \varepsilon''_y + \varepsilon'''_y = -\nu \varepsilon'_x + \varepsilon''_y - \nu \varepsilon'''_z$

$$\varepsilon_z = \varepsilon'_z + \varepsilon''_z + \varepsilon'''_z = -\nu \varepsilon'_x - \nu \varepsilon''_y + \varepsilon'''_z$$

4.3 – Propriedades mecânicas dos materiais isotrópicos

4.3.3 – Lei de Hooke para materiais isotrópicos (Estado triaxial de tensões)

Da Lei de Hooke, eq. (4.8), as deformações devido à σ_x , σ_y e σ_z são colocadas da seguinte forma:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)]$$

Para o caso do corpo ser submetido a esforços de cisalhamento as relações deformação-tensão são colocadas da forma:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

O módulo de cisalhamento G está relacionado a E e ν por:

$$\longrightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

4.4 – Energias de deformação elástica

4.4.1 – Energia de deformação elástica para tensão uniaxial

O trabalho interno armazenado em um corpo deformável como energia elástica de deformação ou energia de deformação elástica, é o produto da força média que atua sobre o corpo enquanto ocorre a deformação, multiplicada pela distância na qual ela age. Neste contexto, considere então o elemento de volume infinitesimal d_x , d_y , d_z submetido à um esforço normal σ_x :

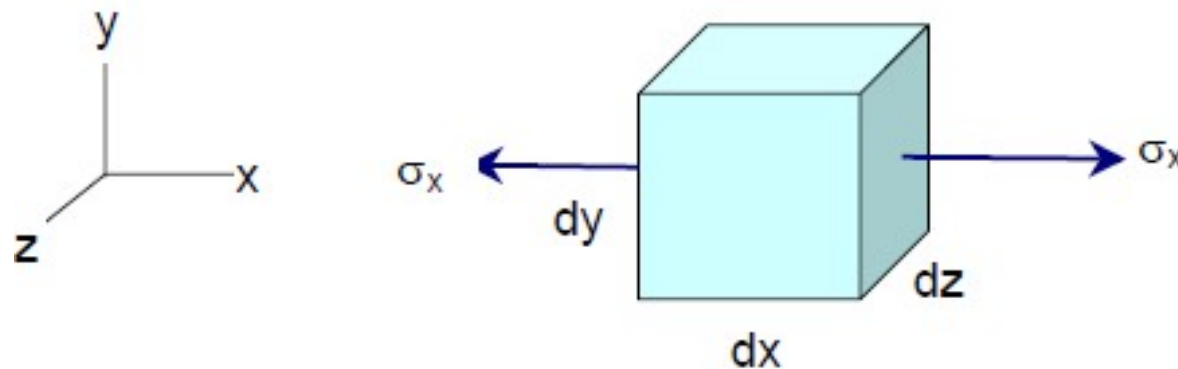


Figura 4.9 – Corpo sólido solicitado uniaxialmente

4.4 – Energias de deformação elástica

4.4.1 – Energia de deformação elástica para tensão uniaxial

A densidade de energia de deformação U_0 é interpretada graficamente como sendo a área sob a linha inclinada do diagrama tensão-deformação.

$$\frac{dU}{dV} = U_0 = \frac{\sigma_x \epsilon_x}{2}$$

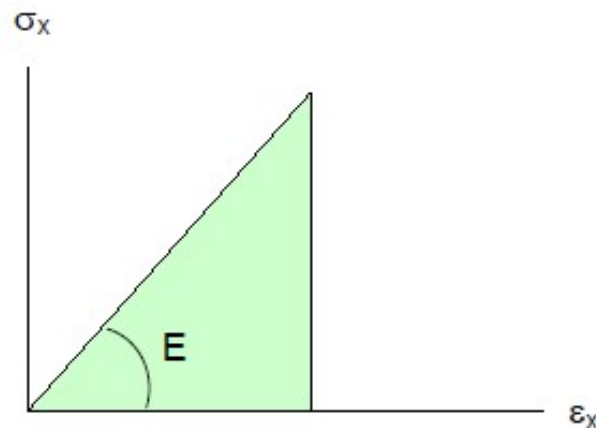


Figura 4.10 – Diagrama tensão-deformação

4.4 – Energias de deformação elástica

4.4.2 – Energia de deformação elástica para tensão de cisalhamento

Considere um elemento de volume infinitesimal d_x , d_y e d_z , submetido à um esforço cisalhante. A energia de deformação elástica pode ser colocada da forma:

$$dU = \left(\frac{1}{2} \tau_{xy} dx dz \right) (\gamma_{xy} dy) = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} dV$$

A densidade de energia de deformação pode ser colocada da seguinte forma:

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy}$$

4.4 – Energias de deformação elástica

4.4.3 – Energia de deformação elástica para um estado de tensão multiaxial

A densidade de energia de deformação elástica de um corpo sollicitado triaxialmente pode ser da seguinte forma:

$$\frac{dU}{dV} = dU_o = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x + \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z + \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} + \frac{1}{2} \tau_{yz} \gamma_{yz} + \frac{1}{2} \tau_{xz} \gamma_{xz}$$

Substituindo a eq. (4.16) na eq. (4.22), a expressão que fornece a densidade de energia de deformação é da forma:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$U_o = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

Em geral, para um corpo elástico sob tensão, a energia de deformação total é obtida pela integração volumétrica da densidade de energia de deformação elástica, eq. (4.23):

$$U = \iiint_V U_o \, d_x \, d_y \, d_z$$

4.5 – Deformação de membros carregados axialmente

Usando a Lei de Hooke e as definições de tensão e deformação, será desenvolvida uma equação que pode ser usada para determinar a deformação elástica de membros submetidos à cargas axiais. Assim, considere uma barra de seção transversal variável ao longo de seu comprimento, Fig. 4.11. A barra é solicitada por duas forças concentradas nas extremidades e por diferentes forças aplicadas ao longo de seu comprimento.

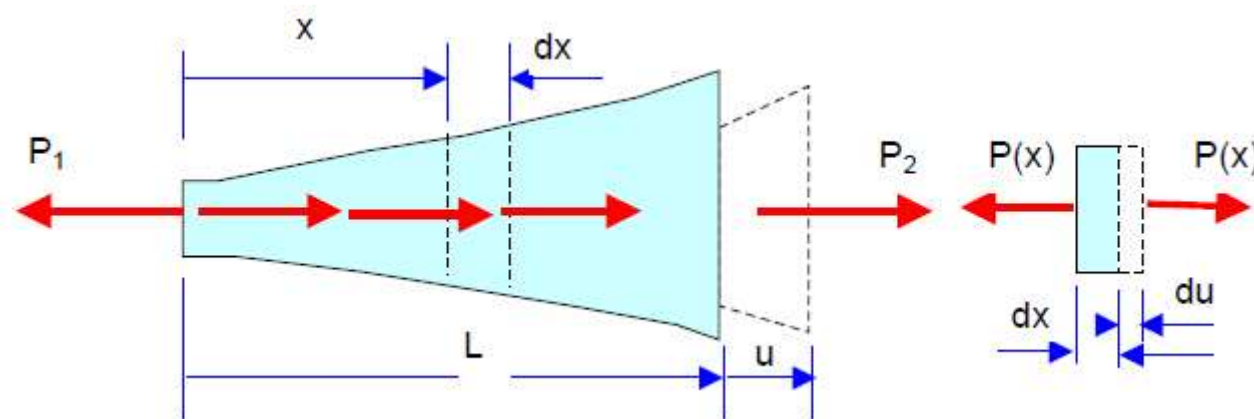


Figura 4.11 – Barra de seção variável solicitada axialmente

4.5 – Deformação de membros carregados axialmente

Num ponto distante x da extremidade, as seguintes relações são válidas:

$$\sigma = \frac{P(x)}{A(x)} \quad \varepsilon = \frac{du}{dx}$$

Substituindo a eq. (4.25) na Lei de Hooke $\sigma = E \varepsilon$, temos: $\frac{P(x)}{A(x)} = E \frac{du}{dx}$

A integração da variação de comprimento d_u ao longo do comprimento da barra fornece:

$$u = \int_0^L \frac{P}{A(x) E} dx$$

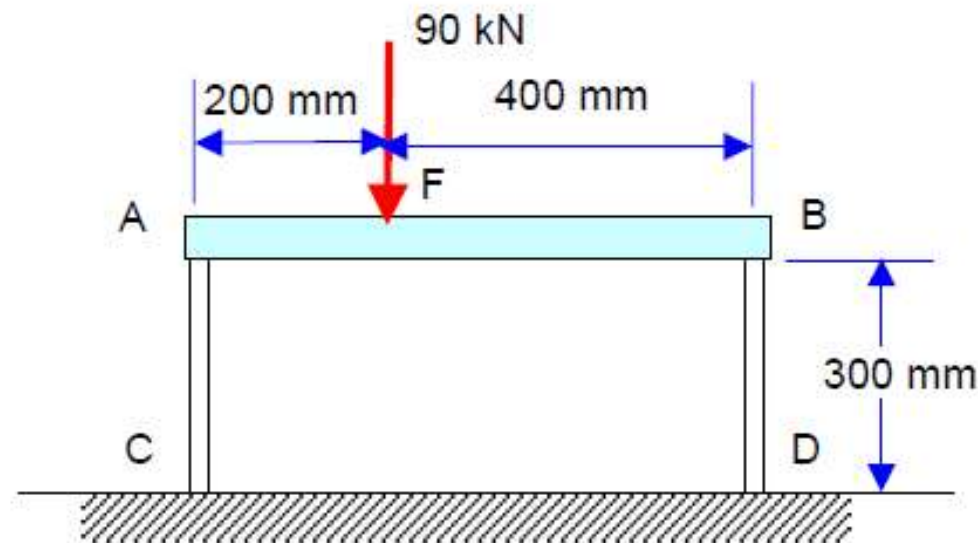
Para o caso da força e da seção transversal serem constantes ao longo do comprimento do membro, tem-se:

$$u = \frac{P L}{A E}$$



Deformação de membros carregados – Exemplo 4.2

A viga rígida AB está apoiada em duas colunas curtas como apresentado abaixo. A coluna AC é de aço e tem diâmetro de 20 mm, e a coluna BD é de alumínio e tem diâmetro de 40 mm. Determine o deslocamento do ponto F na viga AB se a carga de 90 kN é aplicada sobre este ponto. Tome $E_{\text{aço}}=200\text{GPa}$, $E_{\text{al}}=70\text{GPa}$.



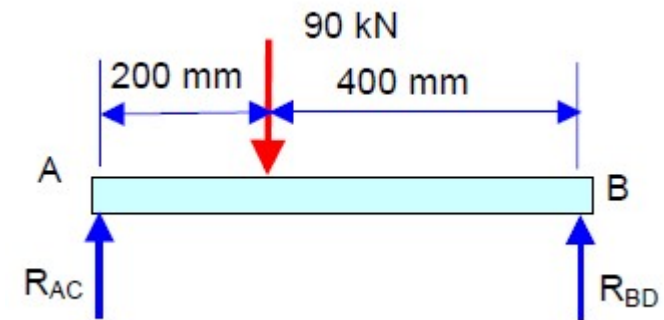


Deformação de membros carregados – Exemplo 4.2

1 – Determinar as reações das colunas AC e BD na viga AB.

$$\sum M_A = 0, R_{BD} \cdot 600 - 90 \cdot 200 = 0, R_{BD} = 30 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, R_{AC} - 90 + 30 = 0, R_{AC} = 60 \text{ kN}$$



2 – Determinar os deslocamentos das colunas.

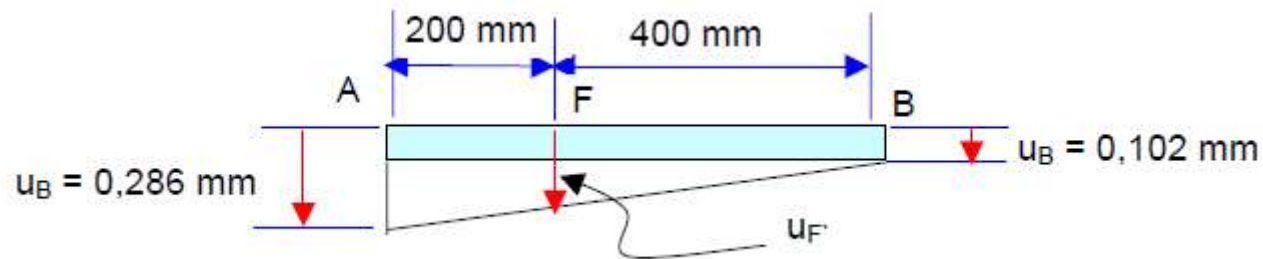
Coluna AC:
$$u_A = \frac{R_{AC} \cdot L_{AC}}{E_{aço} \cdot A_{AC}} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 300}{200 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi \cdot 20^2}{4}} = 0,286 \text{ mm}$$

Coluna BD:
$$u_B = \frac{R_{BD} \cdot L_{BD}}{E_{al} \cdot A_{BD}} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 300}{70 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi \cdot 40^2}{4}} = 0,102 \text{ mm}$$



Deformação de membros carregados – Exemplo 4.2

3 – Determinar o deslocamento do ponto F



Por semelhança de triângulos:

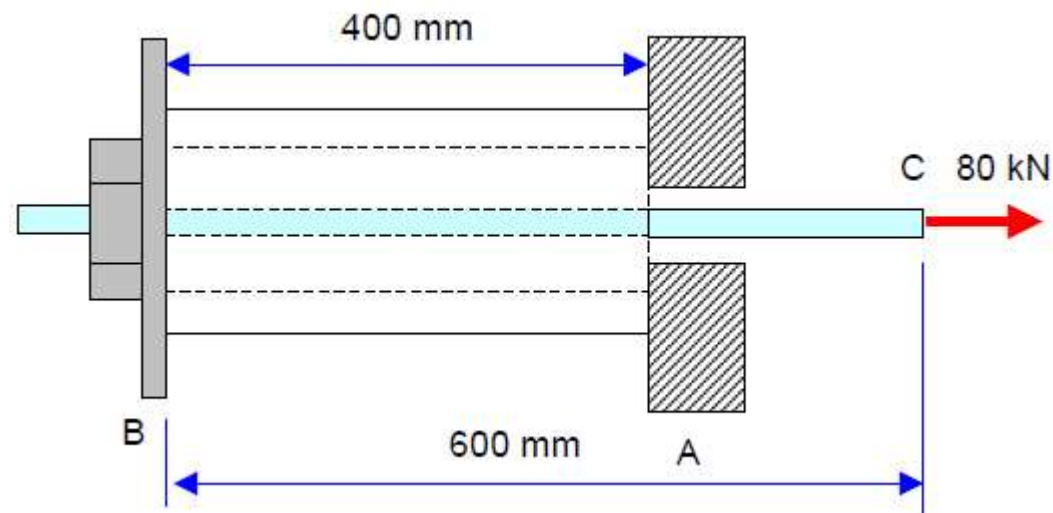
$$\frac{(0,286 - 0,102)}{(200 + 400)} = \frac{u_{F'}}{400} \quad , \quad u_{F'} = 0,123 \text{ mm}$$

$$u_F = 0,102 + 0,123 = 0,225 \text{ mm}$$



Deformação de membros carregados – Exemplo 4.3

O conjunto abaixo consiste de um tubo de alumínio AB tendo uma área de 400 mm^2 . Uma haste de aço de diâmetro 10 mm é conectada ao tubo AB por uma arruela e uma porca em B. Se uma força de 80 kN é aplicada na haste, determine o deslocamento da extremidade C. Tome $E_{\text{aço}}=200\text{GPa}$ e $E_{\text{al}}=70\text{GPa}$.





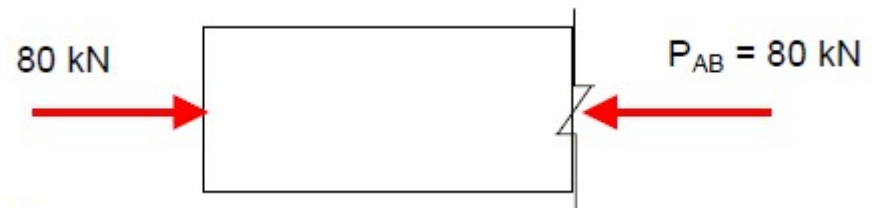
Deformação de membros carregados – Exemplo 4.3

Haste BC:



$$u_{C/B} = \frac{P_{BC} L_{BC}}{E_{aço} A_{BC}} = \frac{80000 \cdot 600}{200 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi \cdot 10^2}{4}}, \quad u_{C/B} = 3,06 \text{ mm} \rightarrow$$

Tubo AB:



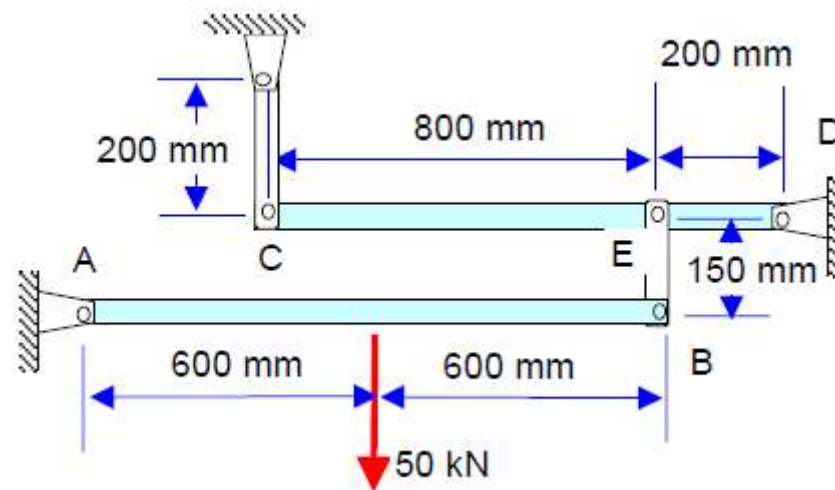
$$u_{B/A} = \frac{P_{AB} L_{AB}}{E_{al} A_{AB}} = \frac{80000 \cdot 400}{70 \cdot 10^3 \cdot 400}, \quad u_{B/A} = 1,14 \text{ mm} \rightarrow$$

$$u_c = u_{C/B} + u_{B/A} = 3,06 + 1,14, \quad u_c = 4,2 \text{ mm} \rightarrow$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Deformação de membros carregados – **Exemplo 4.4**

O conjunto abaixo consiste de duas barras rígidas originalmente horizontais. Elas são suportadas por duas barras de área 25 mm^2 e $E = 200 \text{ GPa}$. Se uma força vertical de 50 kN é aplicada na barra AB, determine o deslocamento em C, B e E.





Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Deformação de membros carregados – **Exemplo 4.4**

Diagrama de corpo rígido da barra AB:

Devido a simetria: $R_A = R_B = 25 \text{ kN}$

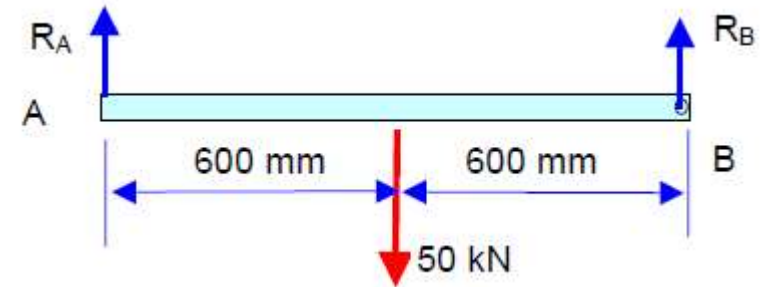
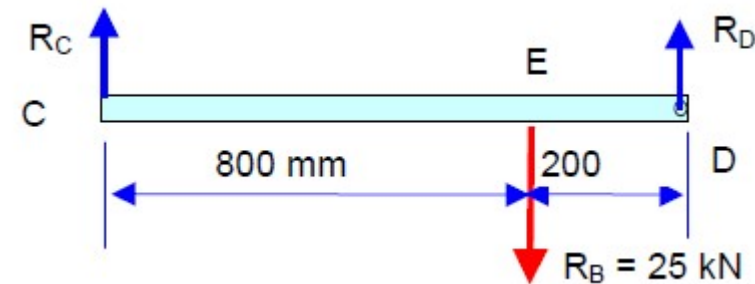


Diagrama de corpo rígido da barra CB:



$$\sum M_D = 0, R_B \cdot 200 - R_C \cdot 1000 = 0, R_C = 5 \text{ kN}$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Deformação de membros carregados – **Exemplo 4.4**

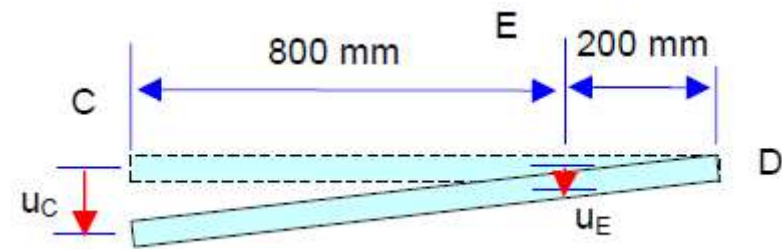
Deslocamento do ponto C:

$$u_C = \frac{R_C L_C}{E A} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 200}{200 \cdot 10^3 \cdot 25}, \quad u_C = 0,2 \text{ mm}$$

Deslocamento do ponto E:

Por semelhança de triângulos:

$$\frac{u_E}{200} = \frac{u_C}{1000}, \quad u_E = 0,04 \text{ mm}$$



Deslocamento do ponto B:

$$u_{B/E} = \frac{R_B L_{BE}}{E A} = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 150}{200 \cdot 10^3 \cdot 25}, \quad u_{B/E} = 0,75 \text{ mm}$$

$$u_B = u_{B/E} + u_E = 0,75 + 0,04, \quad u_B = 0,79 \text{ mm}$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Deformação de membros carregados – **Exemplo 4.4**

A barra abaixo tem diâmetro de 5 mm e está fixa em A. Antes de aplicar a força $P = 20$ kN, há um gap entre a parede em B' e a barra de 1 mm. Determine as reações em A e B'. Considere $E = 200$ GPa.



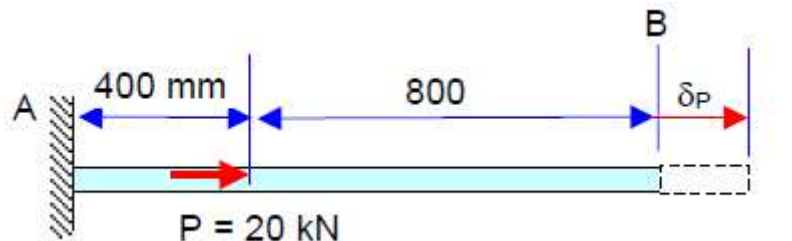


Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

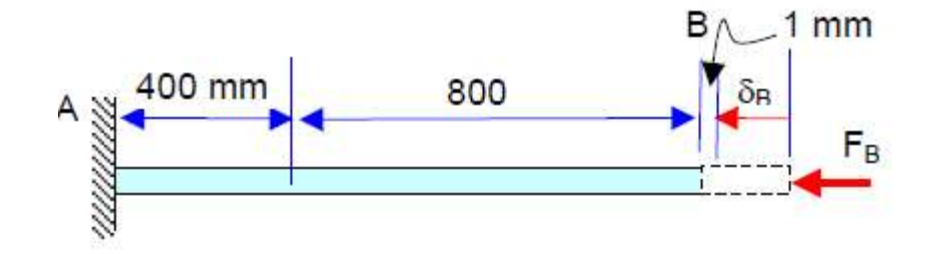
Deformação de membros carregados – **Exemplo 4.4**

A reação na parede B irá surgir somente se o deslocamento devido a força P for maior que o gap de 1 mm. Neste caso podemos determinar o deslocamento em B devido à duas forças, P e a reação em B. Supondo que não houvesse a parede B',

- o deslocamento em B devido a força P δ_P seria:


$$\delta_P = \frac{P L_{AC}}{E A} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 400}{200 \cdot 10^3 \frac{\pi \cdot 5^2}{4}}, \quad \delta_P = 2,037 \text{ mm}$$

- e, o deslocamento em B devido a reação P em B δ_B seria:


$$\delta_B = \frac{F_B L_{AB}}{E A} = \frac{F_B \cdot 1200}{200 \cdot 10^3 \frac{\pi \cdot 5^2}{4}}, \quad \delta_B = 0,3056 \cdot 10^{-6} \cdot F_B \text{ mm}$$

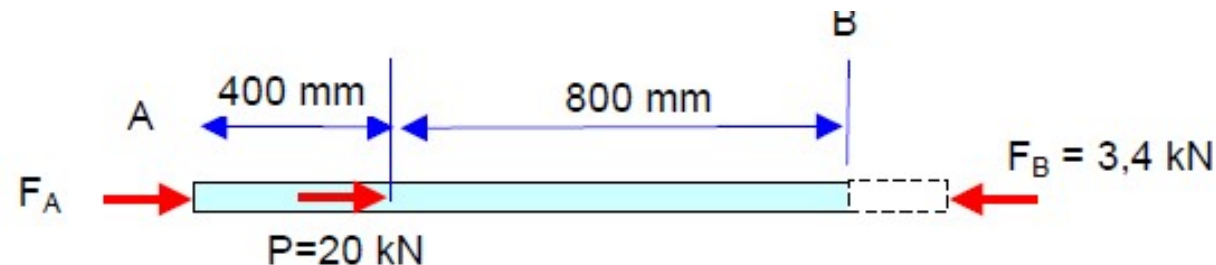


Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Deformação de membros carregados – **Exemplo 4.4**

A reação em B surgirá somente se o deslocamento δ_P for maior que 1 mm, logo:

$$1 = \delta_P - \delta_B, \quad 1 = 2,037 - 0,3056 \cdot 10^{-6} \cdot F_B, \quad F_B = 3,4 \text{ kN}$$

Do equilíbrio estático, temos:



$$\rightarrow \sum F = 0, \quad F_A + 20 - 3,4 = 0, \quad F_A = 16,6 \text{ kN}$$

4.6 – Tensões Residuais

Se uma estrutura estaticamente indeterminada é carregada excessivamente até causar escoamento do material, isso gerará tensões residuais na estrutura quando o carregamento for removido. A razão do aparecimento dessas tensões residuais está na recuperação elástica do material que ocorre durante o descarregamento. Considere, por exemplo, um material elastoplástico cujo diagrama tensão-deformação é mostrada na Fig. 4.12.

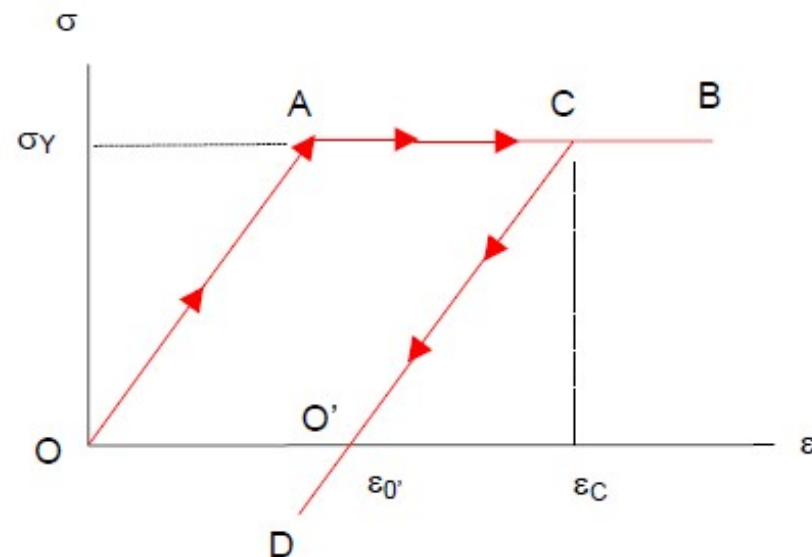
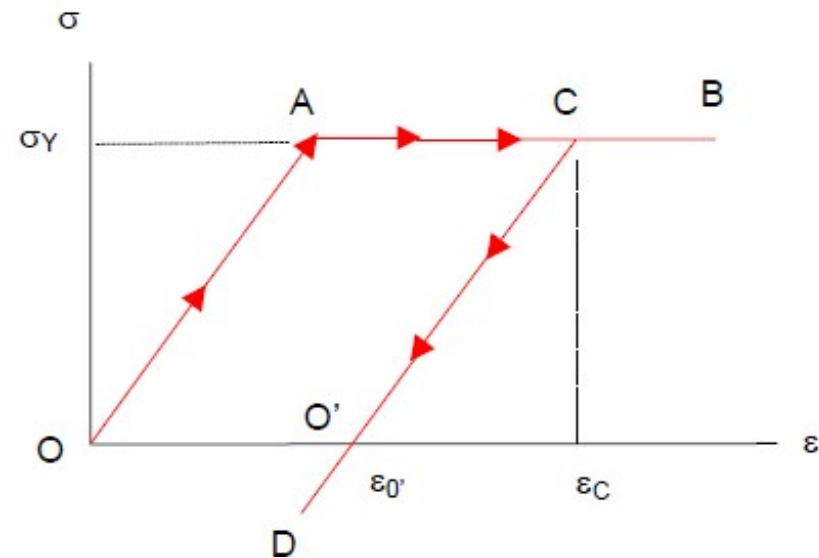


Figura 4.12 – Diagrama tensão-deformação para um material elastoplástico

4.6 – Tensões Residuais

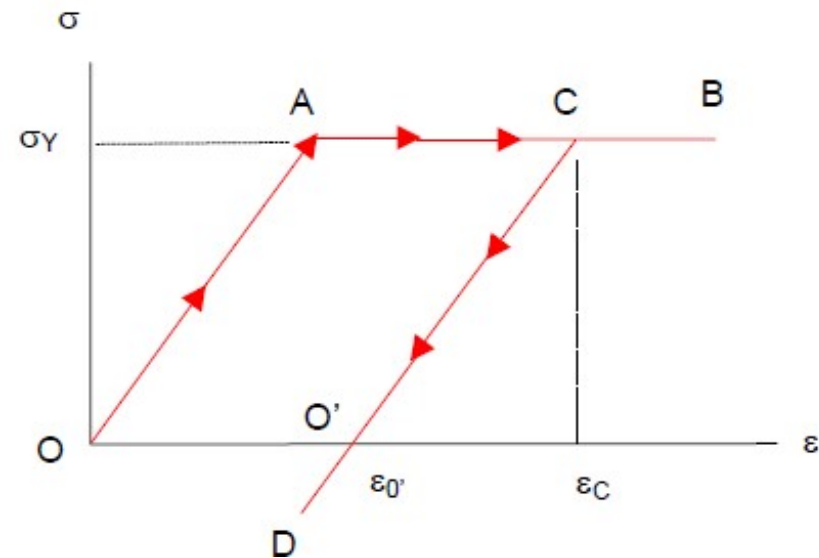
Se uma carga axial produz uma tensão σ_Y no material e uma correspondente **deformação específica plástica** ϵ_C , quando a carga for removida, o material responderá elásticamente seguindo a linha CD de forma a recuperar a parte da deformação plástica correspondente.

Uma recuperação completa até a tensão nula no ponto O' somente será possível caso a estrutura seja estaticamente determinada, uma vez que as reações de apoio da estrutura deverão ser nulas quando a carga for removida. Nestas condições, a estrutura será **deformada permanentemente** pela deformação ϵ_0' .



4.6 – Tensões Residuais

Entretanto, se a estrutura é estaticamente indeterminada, a remoção das cargas externas fará com que surjam forças reativas nos apoios que respondem a **recuperação elástica** CD. Como essas forças restringem a estrutura de uma recuperação plena, elas induzirão tensões residuais na estrutura.



4.6 – Tensões Residuais

Para resolver este tipo de problema, devemos considerar o **ciclo completo de carregamento e descarregamento** da estrutura como a superposição de uma carga positiva (carregamento) com uma carga negativa (descarregamento).



O carregamento de O até C resulta em uma distribuição de tensões plásticas, enquanto o descarregamento ao longo de CD resulta apenas em uma distribuição de tensões elásticas.

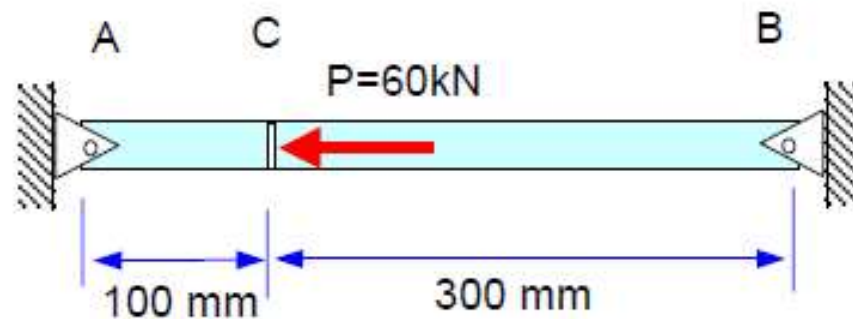


A superposição requer que as cargas se cancelem; entretanto, a distribuição das tensões não se cancelará gerando assim as tensões residuais.



Tensões Residuais – Exemplo 4.6

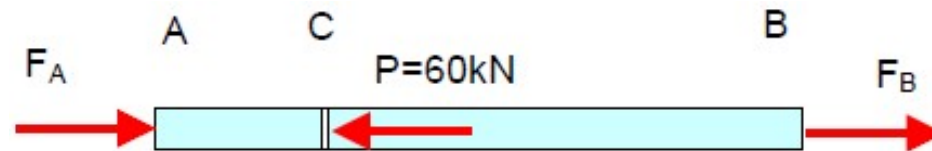
A barra abaixo tem raio de 5 mm e é fabricada de um material elástico perfeitamente plástico para o qual $\sigma_y = 420$ MPa e $E = 70$ GPa. Se uma força $P = 60$ kN é aplicada à barra e, em seguida, removida, determine a tensão residual na barra e o deslocamento permanente do Ponto C.





Tensões Residuais – Exemplo 4.6

O diagrama de corpo livre da barra é da forma:



Do equilíbrio estático, temos:

$$F_A - 60 + F_B = 0$$

Uma equação de compatibilidade é obtida impondo a variação nula de comprimento da barra:

$$\delta_{CA} + \delta_{CB} = 0$$

As forças que irão atuar nos trechos CA e CB são respectivamente F_A e F_B . Assim:

$$\frac{-F_A L_{CA}}{EA} + \frac{F_B L_{CB}}{EA} = 0$$



Tensões Residuais – Exemplo 4.6

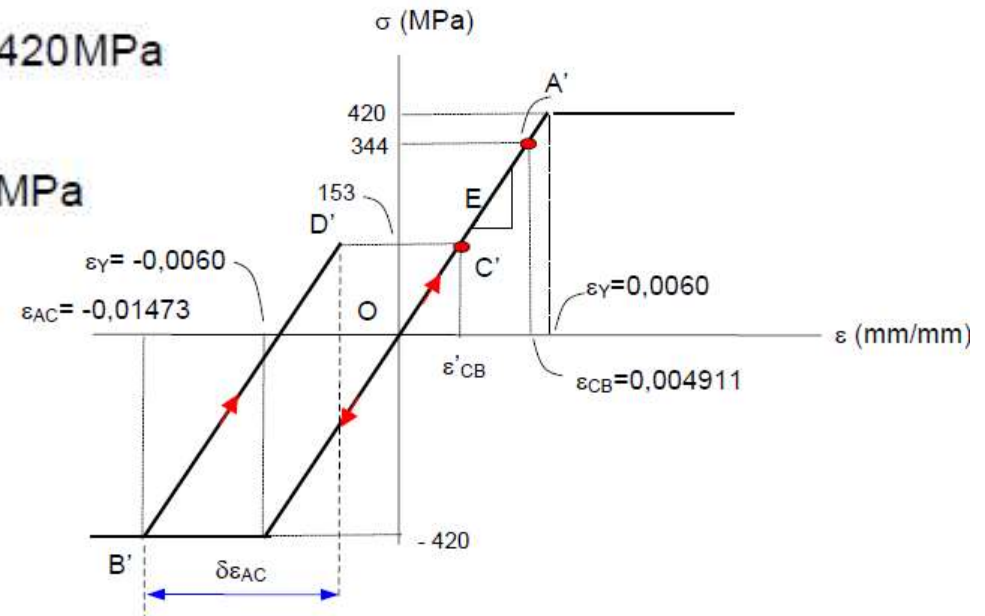
Introduzindo a eq. (c) na eq. (a) obtêm-se: $F_A = 45 \text{ kN}$ e $F_B = 15 \text{ kN}$

$$\frac{-F_A L_{CA}}{EA} + \frac{F_B L_{CB}}{EA} = 0 \longrightarrow F_A - 60 + F_B = 0$$

Entretanto, estas forças resultam nas tensões:

$$\sigma_{CA} = \frac{-45 \cdot 10^3 \text{ N}}{\pi 5^2 \text{ mm}^2} = -573 \text{ MPa} > \sigma_Y = -420 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{CB} = \frac{15 \cdot 10^3 \text{ N}}{\pi 5^2 \text{ mm}^2} = 191 \text{ MPa} < \sigma_Y = 420 \text{ MPa}$$





Tensões Residuais – Exemplo 4.6

Observa-se que o trecho CA escoa, enquanto o trecho CB não escoa. Como a maior tensão possível no trecho CA é 420 MPa, a maior força possível que surge neste trecho é:

$$F_A = 420 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \pi 5^2 \text{mm}^2 = 33,0 \text{kN}$$

Pela condição de equilíbrio da barra, eq. (a),

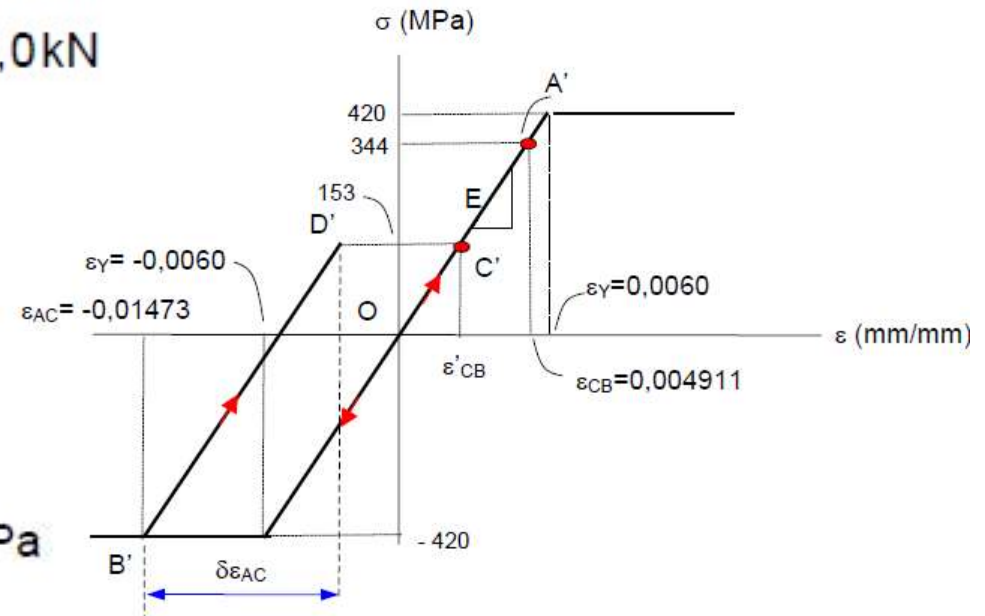
$$\text{temos que: } F_B = 60 \text{kN} - 33,0 \text{kN} = 27,0 \text{kN}$$

A tensão em cada segmento

da barra será portanto:

$$\sigma_{CA} = \sigma_Y = -420 \text{MPa}$$

$$\sigma_{CB} = \frac{27,0 \cdot 10^3 \text{kN}}{\pi 5^2 \text{mm}^2} = 344 \text{MPa} < 420 \text{MPa}$$





Tensões Residuais – Exemplo 4.6

Tensões residuais: Este valor pode também ser determinado da forma:

$$\varepsilon_{CA} = \frac{\delta_C}{L_{CA}} = -\frac{1,473 \text{ mm}}{100 \text{ mm}} = -0,01473 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{CA} = \frac{\delta_C}{L_{CA}} = \frac{F_A}{A E} = \frac{33,0 \cdot 10^3 \text{ N}}{\pi \cdot 5^2 \text{ mm}^2 \cdot 70 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2} = -0,01473 \text{ mm}$$

Entretanto, quando a carga P é aplicada, o comportamento do material no trecho CB corresponde a uma evolução do ponto O para o ponto A' do diagrama tensão-deformação. Ao mesmo tempo, o comportamento do material na trecho AC evolui do ponto O para o ponto B' . Se a carga P é aplicada no sentido oposto, ou seja, se a carga for removida ocorrerá uma resposta elástica e forças opostas $F_A=45\text{kN}$ e $F_B=15\text{kN}$ devem ser aplicadas aos correspondentes segmentos. Conforme calculado anteriormente, essas forças produzem as tensões $\sigma_{AC}=573\text{MPa}$ e $\sigma_{CB}=-191\text{MPa}$ e, como resultado, a tensão residual em cada trecho será:

$$(\sigma_{AC})_r = -420 + 573 = 153 \text{ MPa}$$

$$(\sigma_{CB})_r = 344 - 191 = 153 \text{ MPa}$$



Tensões Residuais – Exemplo 4.6

Deslocamento permanente: A deformação residual em CB é:

$$\varepsilon'_{CB} = \frac{\sigma_{CB}}{E} = \frac{153 \text{ MPa}}{70 \cdot 10^3 \text{ MPa}} = 0,002185$$

Logo, o deslocamento permanente do ponto C será:

$$\delta_C = \varepsilon'_{CB} L_{CB} = 0,002185 \cdot 300 \text{ mm} = \leftarrow 0,655 \text{ mm}$$

Este mesmo resultado pode ser determinado

pela deformação específica residual do trecho AC:

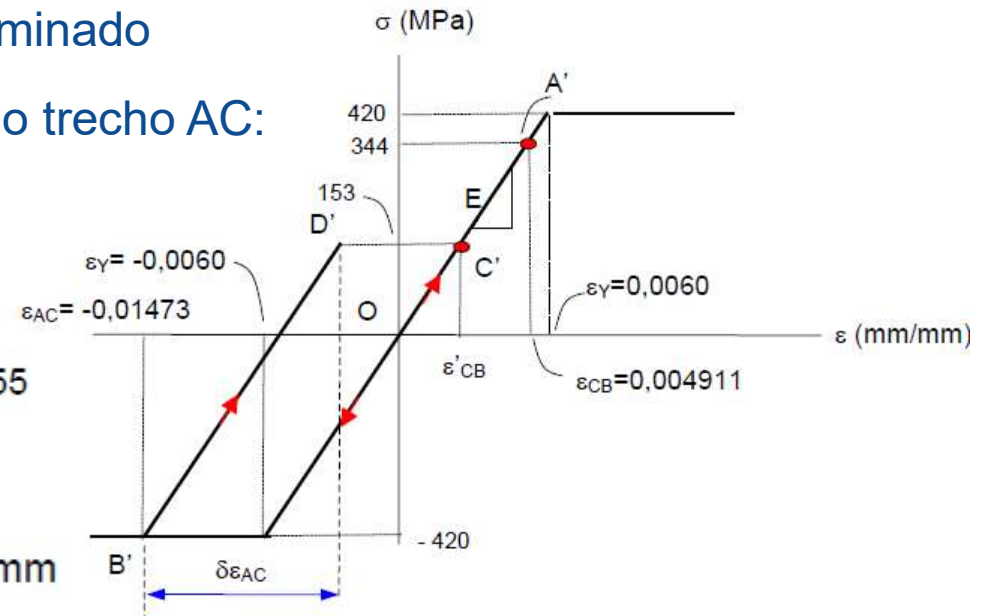
$$\delta\varepsilon_{AC} = \frac{\delta\sigma}{E} = \frac{(420 + 153) \text{ MPa}}{70 \cdot 10^3 \text{ MPa}} = 0,008185$$

Portanto:

$$\varepsilon'_{AC} = \varepsilon_{AC} + \delta\varepsilon_{AC} = -0,01473 + 0,008185 = -0,00655$$

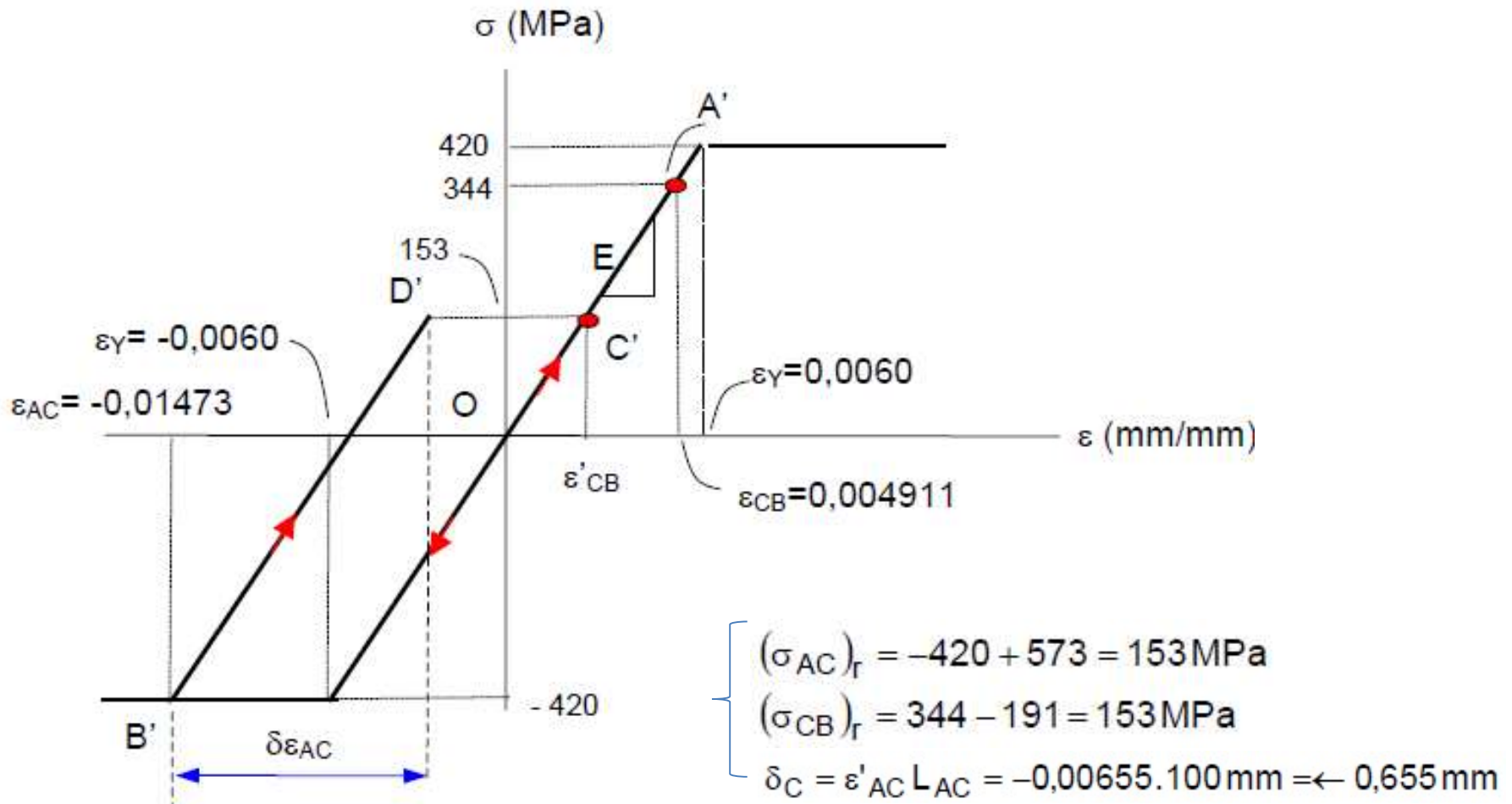
Finalmente:

$$\delta_C = \varepsilon'_{AC} L_{AC} = -0,00655 \cdot 100 \text{ mm} = \leftarrow 0,655 \text{ mm}$$





Tensões Residuais – Exemplo 4.6





Importante! Lista de Exercícios

Como reforço do aprendizado do conteúdo apresentado em sala de aula, são sugeridos os exercícios dispostos na lista abaixo. Bom estudo!

FERDINAND, P. B.; JOHNSTON JR, E. R; Resistência dos Materiais, Mc Graw-Hill

Resistência dos Materiais						
Capítulo						

Capítulo 5 – TORÇÃO

- ≡ 5.1 – Aplicação do método das seções
- ≡ 5.2 – Premissas Básicas
- ≡ 5.3 – A fórmula da torção
- ≡ 5.4 – Observações sobre a fórmula da torção
- ≡ 5.5 – Projeto de membros circulares em torção
- ≡ 5.6 – Ângulo de torção de membros circulares
- ≡ 5.7 – Fórmula da torção para eixos com diferentes materiais
- ≡ 5.8 – Membros maciços não circulares

5.1 – Aplicação do método das seções

Assim como no caso de vigas solicitadas externamente, onde os esforços internos podem ser determinados pelo método das seções, os esforços internos em eixos de seção circular solicitados por torques externos também podem. Considere então o eixo solicitado por torques em 3 pontos ao longo do seu comprimento. O torque interno no trecho AB pode ser determinado da seguinte forma.

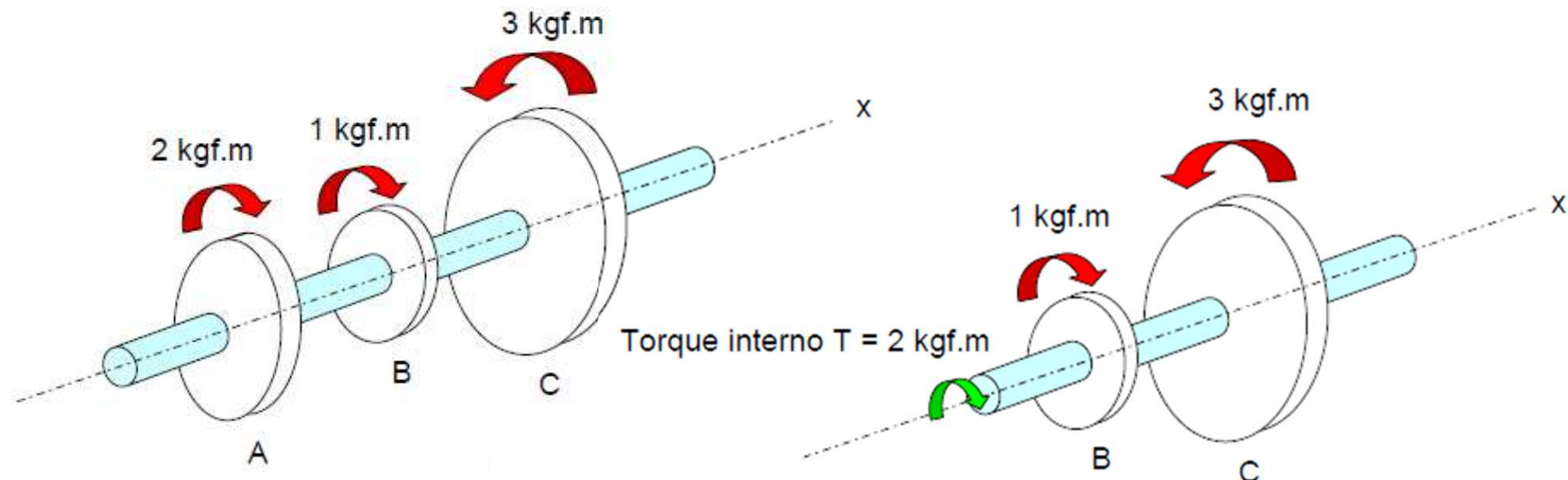


Figura 5.1 – Equilíbrio de torques

5.2 – Premissas Básicas

- Uma seção inicialmente plana, perpendicular ao eixo de seção circular, permanece plana após a aplicação dos torques.
- Em um membro circular sujeito à ação de um torque, as deformações angulares γ variam linearmente a partir do eixo central. Isto significa que as linhas radiais nos planos ao longo do eixo x permanecem retas após a deformação.

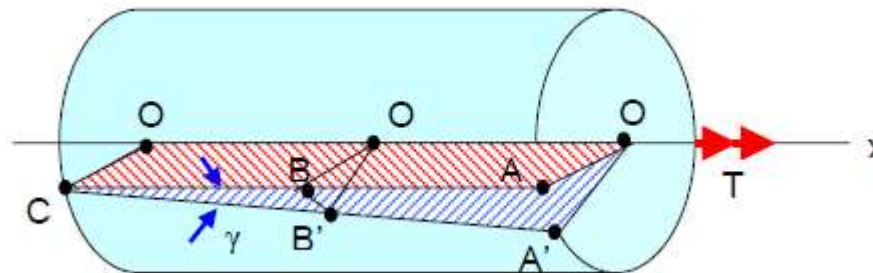


Figura 5.2 – Premissas básicas da torção

Observação: Estas premissas são válidas somente para eixos de seção circular.

5.3 – A fórmula da torção

Para o caso linearmente elástico, a Lei de Hooke se aplica $\tau = G \gamma$:

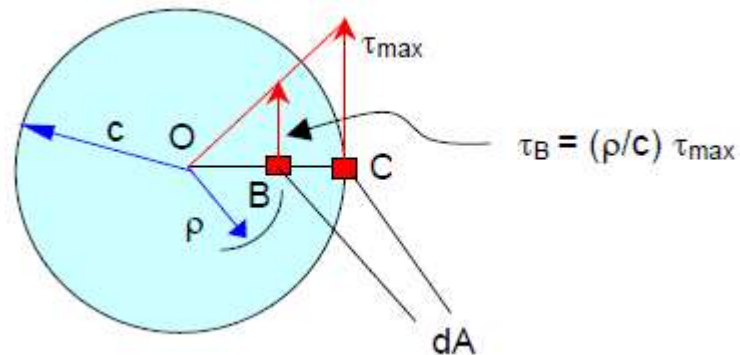


Figura 5.3 – Torque interno atuando na seção transversal

O torque interno na seção transversal é a soma dos torques infinitesimais atuantes em cada área dA .

$$T = \int_A \frac{\rho}{c} \tau_{\max} dA \quad \rho = \frac{\tau_{\max}}{c} J$$

onde o momento polar de inércia de área J é dado da forma:

$$J = \int_A \rho^2 dA$$

5.3 – A fórmula da torção

O momento polar de inércia para o caso particular de uma seção circular é da seguinte forma:

$$J = \int_A \rho^2 dA \longrightarrow J = \int_0^c \rho^2 (2\pi \rho d\rho) = 2\pi \int_0^c \rho^3 d\rho = \frac{\pi c^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

onde d é o diâmetro da seção transversal. Substituindo a eq. (5.3) na eq. (5.1), a expressão da tensão máxima atuando na superfície mais externa do eixo é:

$$T = \int_A \frac{\rho}{c} \tau_{\max} dA \quad \rho = \frac{\tau_{\max}}{c} J \longrightarrow \tau_{\max} = \frac{T c}{J}$$

A tensão num ponto qualquer da seção circular distante ρ do centro é:

$$\tau = \frac{\rho T c}{c J} = \frac{T \rho}{J}$$

Para tubos circulares de raio interno b e raio externo c , o momento polar de inércia pode ser calculado como segue:

$$J = \int_A \rho^2 dA = \int_0^c 2\pi \rho^3 d\rho = \frac{\pi c^4}{2} - \frac{\pi b^4}{2} = J_e - J_i$$

5.4 – Observações sobre a fórmula da torção

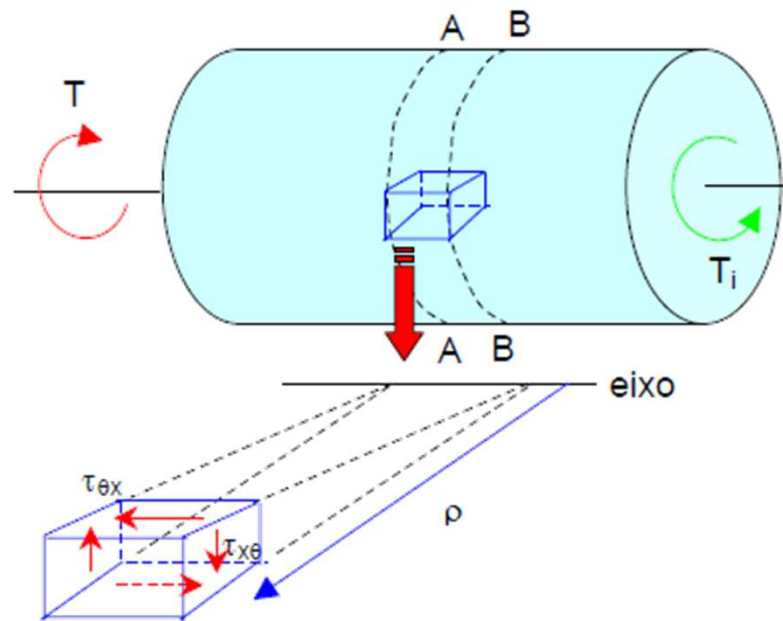


Figura 5.4 – Estado de tensão em um elemento infinitesimal de um eixo em torção

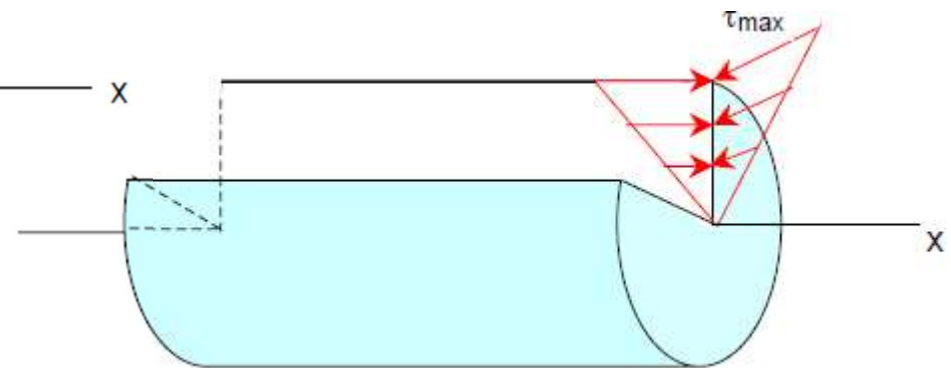


Figura 5.5 – Tensões de cisalhamento atuando em planos ortogonais

5.4 – Observações sobre a fórmula da torção

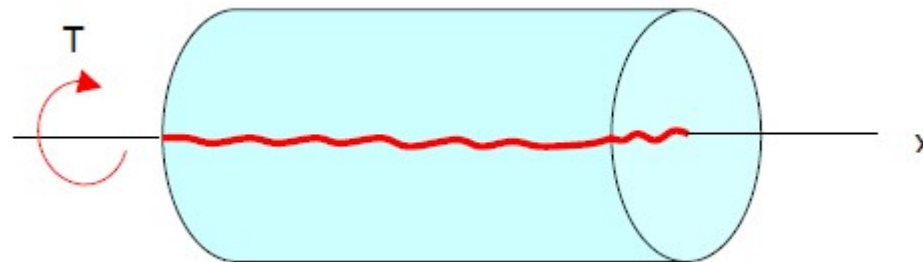


Figura 5.6 – Plano de ruptura em eixos em madeira



Para o caso de **materiais anisotrópicos** (diferentes propriedades mecânicas nas direções x , y e z) como por exemplo a madeira, o eixo se rompe ao longo de um plano paralelo ao eixo x



Torção – Exemplo 5.1

Um eixo maciço de raio c é sujeito à um torque T . Determine a fração de T que é resistida pelo material contido na região externa do eixo, de raio interno $c/2$ e raio externo c .





Torção – Exemplo 5.1

A fração de T que é resistida pela parte externa do eixo, T' , pode ser

$$dT' = \rho \tau dA \quad , \quad dT' = \rho \left(\frac{\rho}{c} \tau_{\max} \right) 2\pi \rho d\rho$$

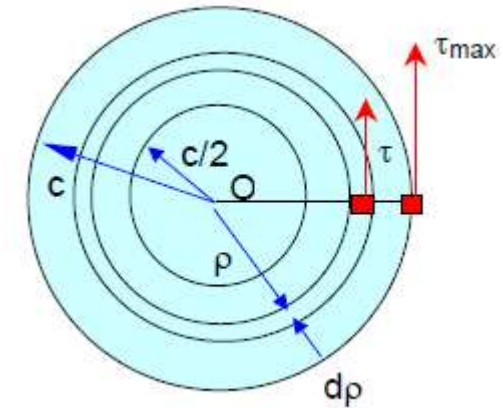
$$T' = \frac{2\pi \tau_{\max}}{c} \int_{c/2}^c \rho^3 d\rho = \frac{2\pi \tau_{\max}}{c} \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_{c/2}^c$$

$$T' = \frac{\pi \tau_{\max}}{2c} \left[c^4 - \frac{c^4}{2^4} \right]$$

$$T' = \frac{\pi \tau_{\max}}{2} \frac{15}{16} c^3$$

e a expressão do torque total T sobre a área é:

$$\tau_{\max} = \frac{T c}{J} = \frac{T c}{\left(\frac{\pi}{2} \right) c^4} \quad , \quad T = \frac{\pi}{2} \tau_{\max} c^3$$



Logo, a relação entre os torques é:

$$T' = \frac{15}{16} T$$



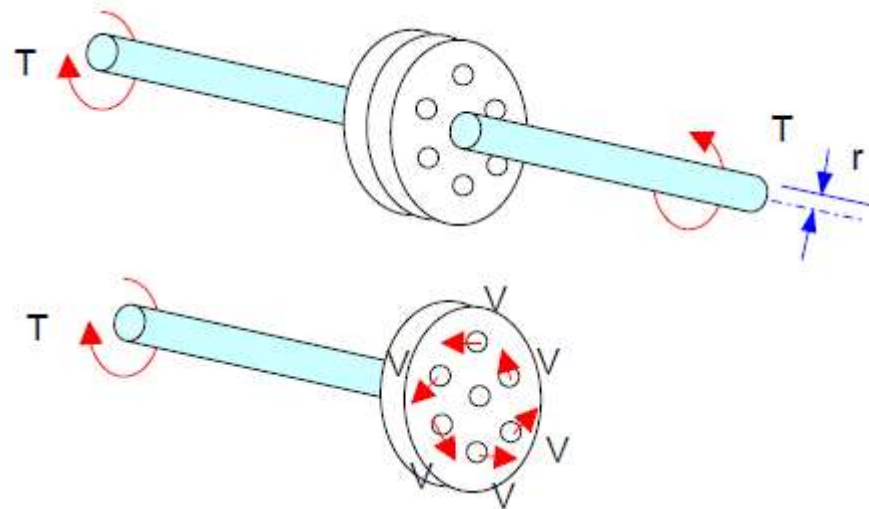
Conclusão:
aproximadamente 94 % do torque é resistido pela área externa do eixo.



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Torção – **Exemplo 5.2**

O acoplamento abaixo é usado para conectar dois eixos. Assumindo que a tensão de cisalhamento nos parafusos é uniforme, determine o número de parafusos para que a máxima tensão de cisalhamento no eixo seja igual a tensão de cisalhamento nos parafusos. Cada parafuso tem diâmetro d e está distante R do cento do eixo.





Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Torção – Exemplo 5.2

Impondo o equilíbrio estático na porção do eixo: $T = n \cdot V \cdot R$

onde n é número de parafusos, V o esforço cortante em cada parafuso e R a distância do centro do parafuso até o centro do eixo.

A tensão média nos parafusos pode ser calculada da seguinte forma: $\tau_m = \frac{V}{A} = \frac{V}{\frac{\pi d^2}{4}}$

Logo, o esforço cortante em cada parafuso V é: $V = \tau_m \frac{\pi d^2}{4}$

Sabe-se que a tensão máxima no eixo é: $\tau_{\max} = \frac{T \cdot r}{J} = \frac{T \cdot r}{\frac{\pi r^4}{2}} = \frac{2 \cdot T}{\pi r^3}$

Da imposição do problema, $\tau_m = \tau_{\max}$. Logo: $V = \frac{2 \cdot T}{\pi r^3} \frac{\pi d^2}{4}$

Da relação entre o torque T e o cortante V , temos: $T = n \frac{2 \cdot T}{\pi r^3} \frac{\pi d^2}{4} R$

Assim, o número necessário de parafusos é: $\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\max}}$

O parâmetro J/c é utilizado para projetar eixos maciços ou perfurados.



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Torção – **Exemplo 5.3**

Selecione dois eixos maciços para transmitir 200 CV de potência cada um, de forma que nenhum deles ultrapasse a tensão de cisalhamento de 7 kgf/mm². Um desses eixos deve operar a 20rpm, e o outro a 20.000rpm. (1CV=4500kgf.m/min, α (rad/min) = $2\pi N$ (rpm)).

Eixo 1:

$$P = T \alpha, \quad 200 \cdot 4500 \frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{\text{min}} = T_1 \cdot 20 \cdot 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{min}}, \quad T_1 = 7162 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

$$\frac{J_1}{c_1} = \frac{T_1}{\tau_{\max}} = \frac{7162 \cdot 10^3}{7} = 1,023 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\frac{J_1}{c_1} = \frac{\pi c_1^3}{2}, \quad c_1 = 86,7 \text{ mm}, \quad d_1 = 173,4 \text{ mm}$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Torção – **Exemplo 5.3**

Eixo 2:

$$P = T \alpha, \quad 200 \cdot 4500 \frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{\text{min}} = T_2 \cdot 20000 \cdot 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{min}}, \quad T_2 = 7,162 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

$$\frac{J_2}{c_2} = \frac{T_2}{\tau_{\max}} = \frac{7,162 \cdot 10^3}{7} = 1,023 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\frac{J_2}{c_2} = \frac{\pi c_2^3}{2}, \quad c_1 = 8,67 \text{ mm}, \quad d_1 = 17,34 \text{ mm}$$



Conclusão: Transmitir potência à alta velocidade.

5.6 – Ângulo de torção de membros circulares

Além do fato do membro dever resistir aos torques aplicados, ele não deve se deformar excessivamente. Assim, considere um elemento submetido a um torque.

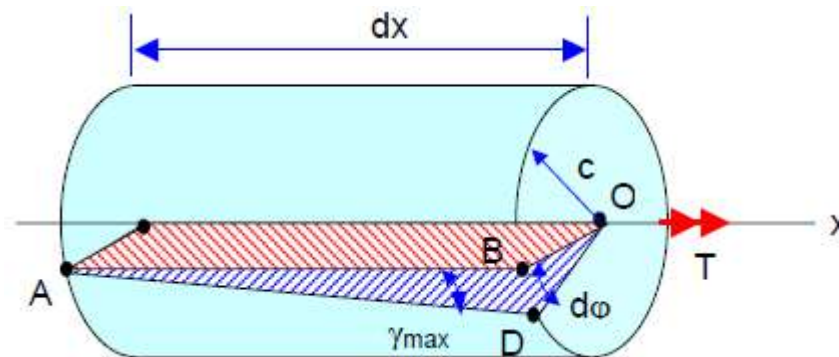


Figura 5.7 – Torção em eixo de seção circular

No plano paralelo ao eixo x , arco $BD = dx \gamma_{max}$, e no plano perpendicular ao eixo x , arco $BD = c d\phi$. Logo:

$$dx \cdot \gamma_{max} = c \cdot d\phi$$

5.6 – Ângulo de torção de membros circulares

Limitando-se a região elástica linear onde a lei de Hooke para o cisalhamento é válida, $\tau_{\max} = G \gamma_{\max}$, e sabendo que:

$$\tau_{\max} = \frac{T c}{J} \longrightarrow d\phi = \frac{T}{JG} dx$$

Expressão geral para ângulo de torção: $\phi = \int_0^L \frac{T(x)}{J(x) G} dx$

Para o caso do torque e da seção transversal serem constantes ao longo do comprimento do eixo, tem-se:

$$\phi = \frac{T L}{J G}$$

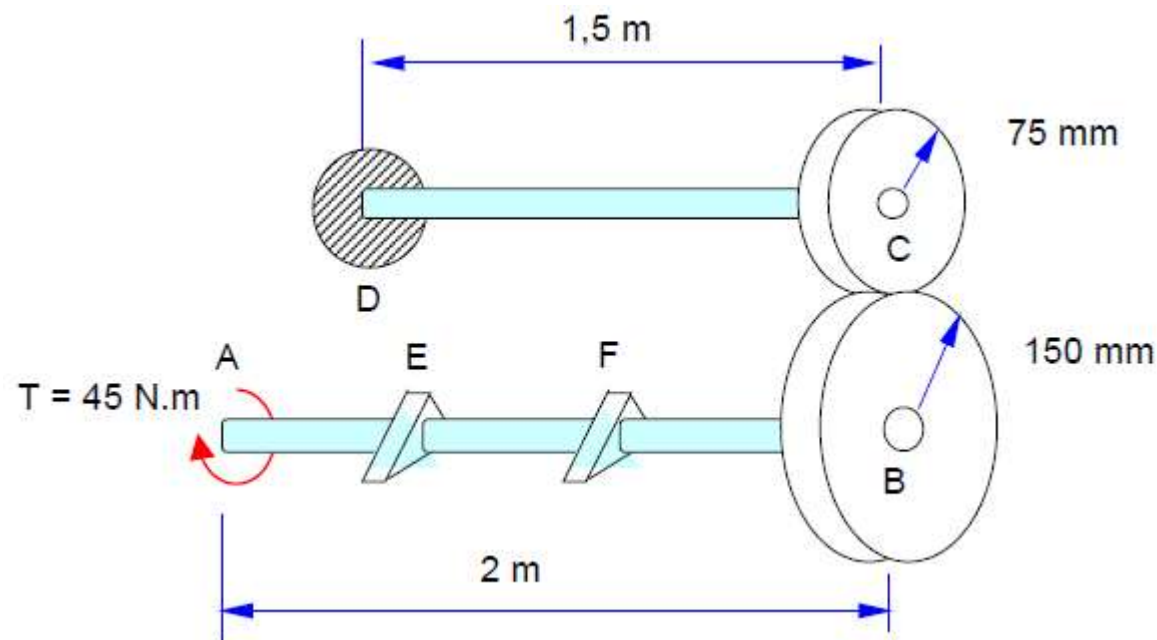
A eq. (5.11) é equivalente a eq. (4.11) para calcular o deslocamento de um ponto numa barra solicitada axialmente.

$$v = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$$



Ângulo de torção de membros circulares – Exemplo 5.4

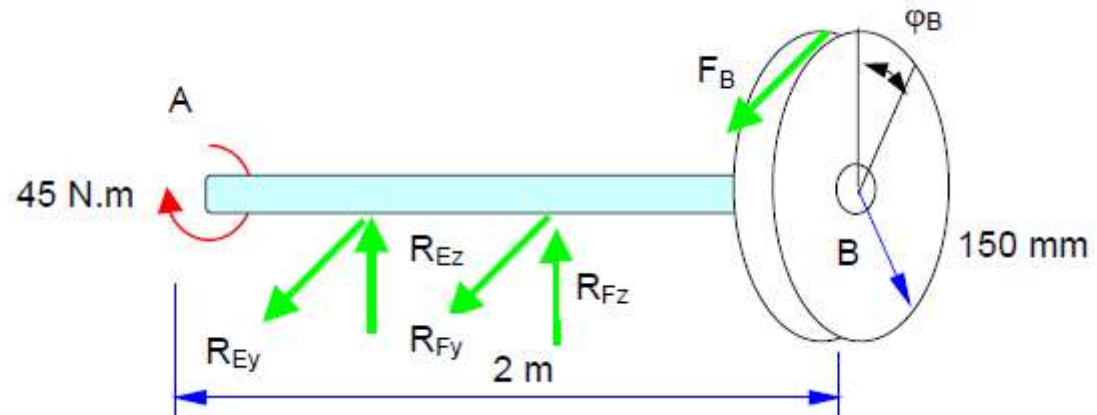
No conjunto mostrado abaixo, os dois eixos estão acoplados por duas engrenagens C e B. Determine o ângulo de torção na extremidade A do eixo AB onde um torque $T = 45 \text{ N.m}$ é aplicado. Cada eixo tem diâmetro de 20mm e $G = 80 \text{ GPa}$.





Ângulo de torção de membros circulares – Exemplo 5.4

Eixo AB:



O ângulo de torção entre os pontos A e B é:

$$\varphi_{A/B} = \frac{T_{AB} L_{AB}}{J G} = \frac{45 \cdot 2}{\frac{\pi \cdot 0,01^4}{2} \cdot 80 \cdot 10^9}, \quad \varphi_{AB} = 0,072 \text{ rad}$$

A força que aparece no ponto de contato entre as engrenagens B e C pode ser determinada impondo o equilíbrio do eixo AB.

$$F_B \cdot 0,15 = 45 \quad , \quad F_B = 300 \text{ N}$$



Ângulo de torção de membros circulares – Exemplo 5.4

Eixo CD:

O torque no eixo CD pode ser determinado da forma:

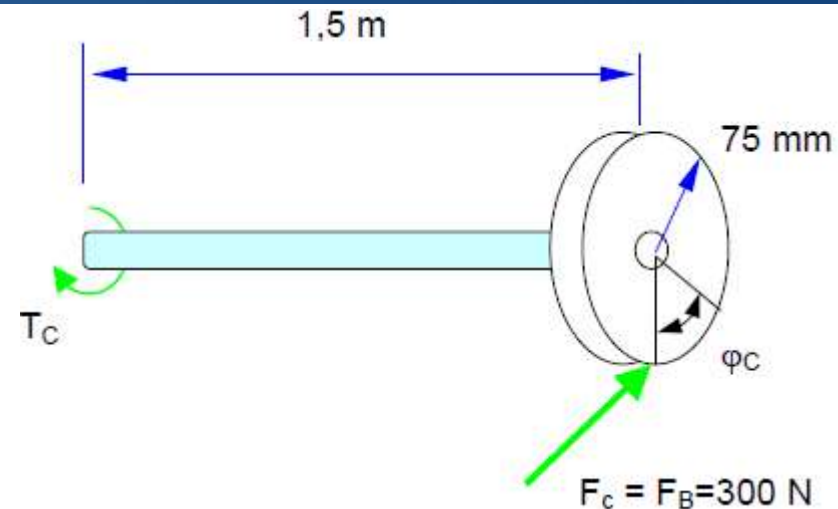
$$T_C = 300 \cdot 0,75 \quad , \quad T_C = 22,5 \text{ N.m}$$

O ângulo de torção entre os pontos C e D, que está engastado é:

$$\varphi_C = \frac{T_C L_{CD}}{J G} = \frac{22,5 \cdot 1,5}{\frac{\pi \cdot 0,01^4}{2} \cdot 80 \cdot 10^9} \quad , \quad \varphi_C = 0,027 \text{ rad}$$

A relação entre os ângulos de torção $\varphi_{A/B}$ e φ_C é:

$$0,15 \cdot \varphi_B = 0,075 \cdot \varphi_C \quad , \quad \varphi_B = 0,0135 \text{ rad}$$



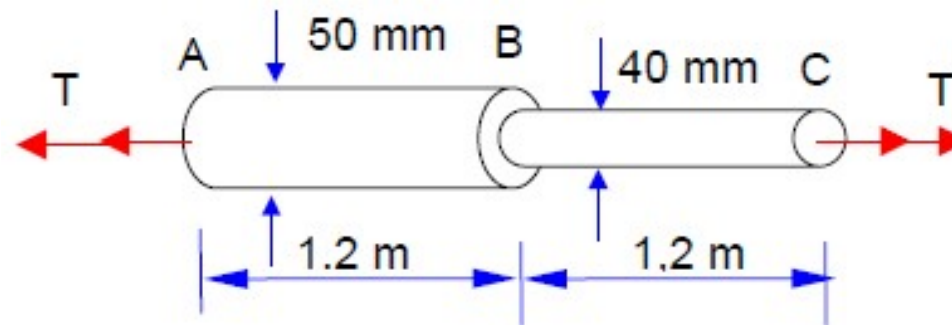
Assim, o ângulo de torção do ponto A é:

$$\varphi_A = \varphi_{A/B} + \varphi_B = 0,072 + 0,0135$$
$$\varphi_A = 0,0855 \text{ rad}$$



Ângulo de torção de membros circulares – Exemplo 5.5

Uma barra circular em torção consiste de 2 partes. Determine o máximo torque possível se o ângulo de torção entre as extremidades da barra não deve exceder 0,02 radianos e a tensão de cisalhamento não deve exceder 28 MPa. Assumir $G = 83 \text{ MPa}$.





Ângulo de torção de membros circulares – Exemplo 5.5

Trecho AB:

O torque no trecho AB pode ser calculado da forma:

$$\tau = \frac{T c}{J}, \quad 28 = \frac{T \cdot 25}{\frac{\pi \cdot 50^4}{32}}, \quad T_{AB} = 687.223,4 \text{ N.mm}$$

e, o ângulo de torção no trecho AB é:

$$\varphi_{AB} = \frac{T L_{AB}}{G J} = \frac{T \cdot 1,2 \cdot 10^3}{83 \cdot 10^9 \frac{\pi \cdot 50^4}{32}}, \quad \varphi_{AB} = T \cdot 2,356 \cdot 10^{-8}$$

Trecho BC:

O torque no trecho BC pode ser calculado da forma:

$$\tau = \frac{T c}{J}, \quad 28 = \frac{T \cdot 20}{\frac{\pi \cdot 40^4}{32}}, \quad T_{BC} = 351.858,4 \text{ mm}$$

e, o ângulo de torção no trecho BC é:

$$\varphi_{BC} = \frac{T L_{BC}}{G J} = \frac{T \cdot 1,2 \cdot 10^3}{83 \cdot 10^9 \frac{\pi \cdot 40^4}{32}}, \quad \varphi_{BC} = T \cdot 25,753 \cdot 10^{-8}$$



Ângulo de torção de membros circulares – Exemplo 5.5

O ângulo de torção entre as extremidades da barra é:

$$\varphi_{AC} = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} = 0,02$$

Assim:

$$T \cdot 2,356 \cdot 10^{-8} + T \cdot 5,753 \cdot 10^{-8} = 0,02 \quad , \quad T = 246.639,5 \text{ N.mm}$$

Resposta: Se fosse considerado o torque de 687.223,4 N.mm ou o torque de 351.858,4 N.mm, o ângulo de torção seria superior à 0,02 radianos, logo o torque de 246.639,5 N.mm não excede a tensão de 28 MPa e não excede o ângulo de torção de 0,02 radianos.

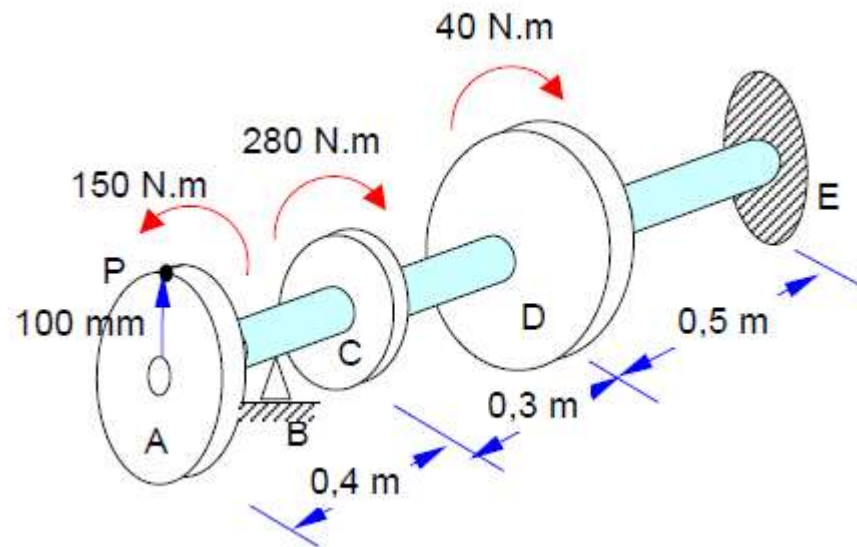


Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Ângulo de torção de membros circulares –

Exemplo 5.6

O eixo está sujeito aos torques como apresentado abaixo. Se o módulo de cisalhamento é $G = 80 \text{ GPa}$ e o diâmetro do eixo é 14 mm , determine o deslocamento do dente P na engrenagem A. O eixo está engastado em E e o mancal B permite que o eixo gire livremente..






Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)


Ângulo de torção de membros circulares –


Exemplo 5.6

O momento polar de inércia do eixo é:


$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 14^4}{32}, \quad J = 3771,5 \text{ mm}^4$$

Trecho AC:  $\varphi_{A/C} = \frac{T_{AC} L_{AC}}{J G} = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{3771,5 \cdot 80 \cdot 10^3}, \quad \varphi_{A/C} = 0,199 \text{ rad (anti-horário)}$

Trecho CD:  $\varphi_{C/D} = \frac{T_{CD} L_{CD}}{J G} = \frac{130 \cdot 10^3 \cdot 0,3 \cdot 10^3}{3771,5 \cdot 80 \cdot 10^3}, \quad \varphi_{C/D} = 0,129 \text{ rad (horário)}$

Trecho DE:  $\varphi_{D/E} = \frac{T_{DE} L_{DE}}{J G} = \frac{170 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{3771,5 \cdot 80 \cdot 10^3}, \quad \varphi_{D/E} = 0,282 \text{ rad (horário)}$

O ângulo de torção entre as extremidades A/E é:

 $\varphi_{A/E} = -\varphi_{A/C} + \varphi_{C/D} + \varphi_{D/E} = -0,199 + 0,129 + 0,282, \quad \varphi_{A/E} = 0,212 \text{ rad (horário)}$

Assim, o deslocamento angular do ponto P:

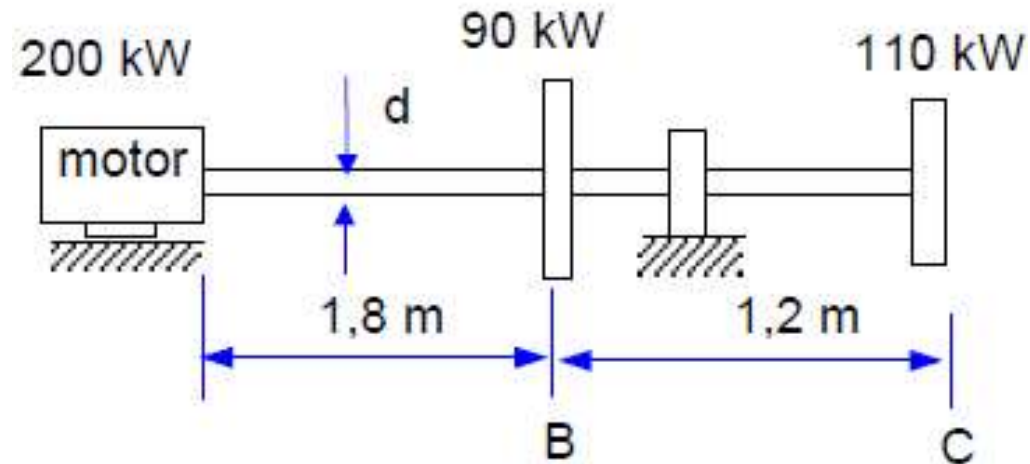
$$\delta_P = \varphi_{A/E} \cdot R = 0,212 \cdot 100, \quad \delta_P = 21,2 \text{ mm}$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Ângulo de torção de membros circulares – Exemplo 5.7

Um motor de 200 kW gira a 250 rpm. Para a engrenagem em B é transmitido 90 kW e para a engrenagem em C 110 kW. Determine o menor diâmetro permissível d se a tensão admissível é de 50 MPa e o ângulo de torção entre o motor e a engrenagem C é limitado a 15° . Considerar $G = 80\text{GPa}$ e $1\text{kW} \approx 60000\text{Nm/mim}$.





Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Ângulo de torção de membros circulares – Exemplo 5.7

Trecho motor-engrenagem B:

A relação entre potência e torque entre o motor e a engrenagem B é dada pela rotação do eixo:

$$P_{\text{motor}} = T_{\text{motor}} \cdot \alpha$$

$$200 \cdot 60000 = T_{\text{motor}} \cdot 250 \cdot 2\pi$$

$$T_{\text{motor}} = 7639 \text{ N m}$$

Da expressão para cálculo da tensão máxima eq. (5.4), pode-se determinar o diâmetro d no trecho entre o motor e a engrenagem B.

$$\tau_{\text{max}} = \frac{T \cdot d / 2}{\frac{\pi d^4}{32}}, \quad 50 = \frac{7639 \cdot 10^3}{\frac{\pi d^3}{16}}, \quad d = 92 \text{ mm}$$

Trecho BC:

De maneira análoga, a relação entre potência e torque no trecho BC é dada pela rotação do eixo:

$$P_{\text{BC}} = T_{\text{BC}} \cdot \alpha$$

$$110 \cdot 60000 = T_{\text{BC}} \cdot 250 \cdot 2\pi$$

$$T_{\text{BC}} = 4202 \text{ N m}$$

e, da expressão de tensão máxima, pode-se determinar o diâmetro do eixo neste trecho:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{T \cdot d / 2}{\frac{\pi d^4}{32}}, \quad 50 = \frac{4202 \cdot 10^3}{\frac{\pi d^3}{16}}, \quad d = 75,4 \text{ mm}$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Ângulo de torção de membros circulares –

Exemplo 5.7

Da expressão que fornece o ângulo de torção entre as extremidades do eixo, pode-se determinar um outro diâmetro:

$$\varphi_{C/motor} = \varphi_{C/B} + \varphi_{B/motor}$$

$$\varphi_{C/motor} = \frac{T_{C/B} \cdot L}{G \cdot J} + \frac{T_{motor} \cdot L}{G \cdot J}$$

$$\varphi_{C/motor} = \frac{4202 \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi d^4}{32}} + \frac{7639 \cdot 10^3 \cdot 1,8 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi d^4}{32}} = \frac{15 \cdot \pi}{180}, \quad d = 55 \text{ mm}$$

Resposta: Para que nenhum dos critérios de projeto sejam desrespeitados, o diâmetro deve ser, $d = 92 \text{ mm}$.

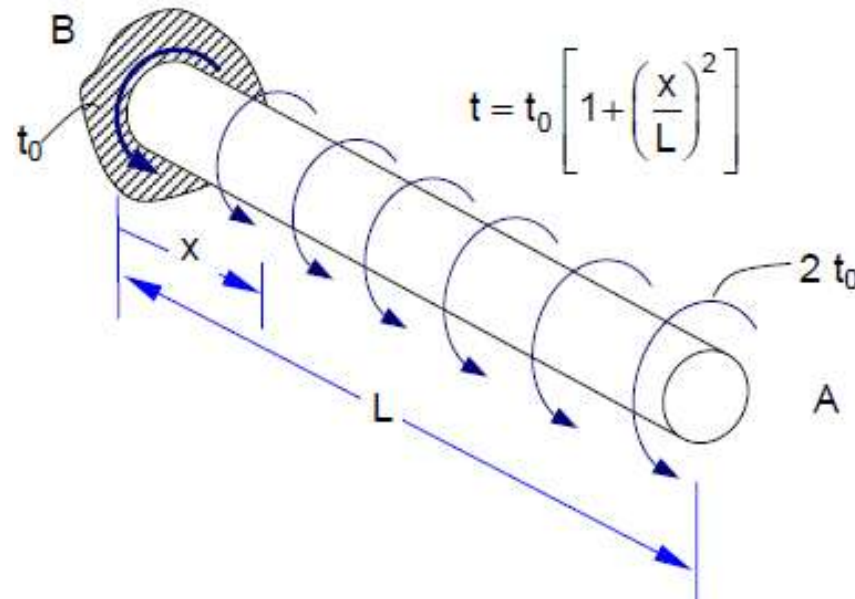


Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Ângulo de torção de membros circulares –

Exemplo 5.8

O eixo de raio c mostrado na figura é submetido à um torque distribuído t , medido como torque por unidade de comprimento do eixo. Determine o ângulo de torção do ponto A.





Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Ângulo de torção de membros circulares – Exemplo 5.8

a – Cálculo do torque resistente T_B :

$$\sum T = 0, T_B - \int_0^L t \, dx = 0$$

$$T_B - \int_0^L \left\{ t_0 \left[1 + \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \right\} dx = 0, T_B = t_0 \left[x + \frac{x^3}{3L^2} \right]_0^L = \frac{4}{3} t_0 L$$

c – Cálculo do ângulo de torção ϕ_A :

$$\phi_A = \int_0^L \frac{T(x) \, dx}{G J(x)}, \quad \phi_A = \frac{1}{G J} \int_0^L \left[T_B - t_0 \left(x + \frac{x^3}{3L^2} \right) \right] dx$$

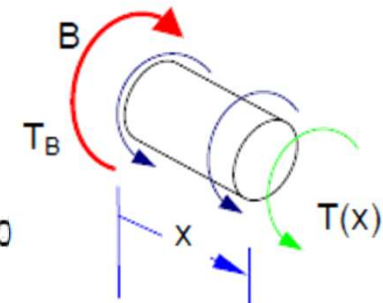
$$\phi_A = \frac{1}{G J} \left[T_B x - t_0 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12L^2} \right) \right], \quad \phi_A = \frac{1}{G J} \left[\frac{4}{3} t_0 L^2 - t_0 \left(\frac{L^2}{2} + \frac{L^4}{12L^2} \right) \right]$$

$$\phi_A = \frac{3 t_0 L^2}{4 G J}$$

b – Cálculo do torque interno $T(x)$:

$$\sum T = 0, T_B - \int_0^x t \, dx - T(x) = 0$$

$$T(x) = T_B - \int_0^x t_0 \left[1 + \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] dx, \quad T(x) = T_B - t_0 \left(x + \frac{x^3}{3L^2} \right)$$



5.7 – Fórmula da torção para eixos com diferentes materiais

Considere um eixo de seção circular composto de um tubo de material 1 e uma barra interna de material 2 sollicitado por um torque.

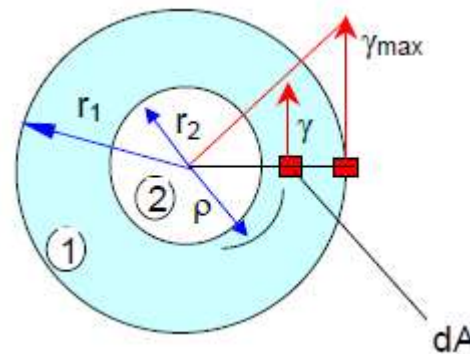


Figura 5.8 – Seção transversal de um eixo com diferentes materiais

A lei de Hooke para o cisalhamento em um material i é $\tau_i = G_i \cdot \gamma$, e o torque interno pode ser obtido através da expressão:

$$T = \int_A \tau \, dA \, \rho$$

5.7 – Fórmula da torção para eixos com diferentes materiais

Usando a lei de Hooke e tomando uma área infinitesimal circular, $dA=2\pi\rho d\rho$, o torque interno pode ser dado por:

$$T = \int_0^{r_1} G_i \gamma 2\pi \rho d\rho$$

Por semelhança de triângulos, tem-se que: $\gamma = \frac{\gamma_{\max} \rho}{r_1}$

Substituindo a eq. (5.14) na eq. (5.13), temos:

$$T = \frac{\gamma_{\max}}{r_1} \int_0^{r_1} G_i 2\pi \rho^3 d\rho$$

Chamando de rigidez equivalente em torção, $\langle GJ \rangle$, a integral,

$$\langle GJ \rangle = \int_0^{r_1} G_i 2\pi \rho^3 d\rho$$

Pode-se determinar a relação:

$$\gamma_{\max} = \frac{T r_1}{\langle GJ \rangle}$$

5.7 – Fórmula da torção para eixos com diferentes materiais

Substituindo a eq. (5.17) na relação que fornece a deformação angular γ numa posição qualquer ρ , tem-se que:

$$\gamma = \frac{T}{\langle GJ \rangle} \rho$$

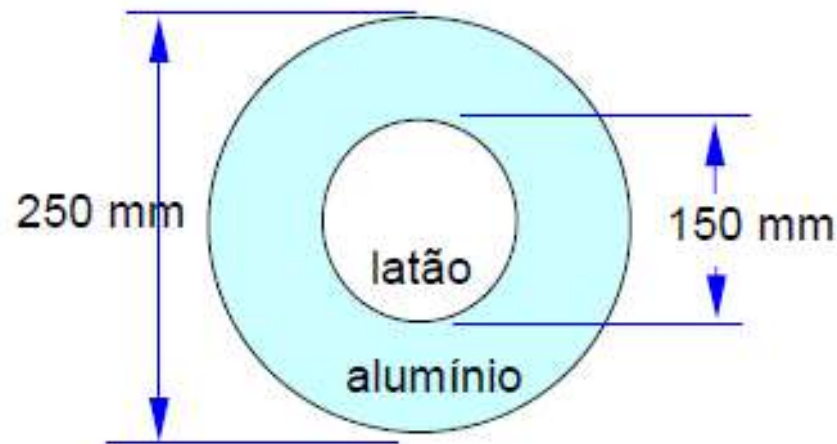
Finalmente, substituindo a eq. (5.18) na lei de Hooke para cisalhamento, obtém-se a expressão da tensão da torção para eixos circulares com diferentes materiais:

$$\tau_i = G_i \frac{T}{\langle GJ \rangle} \rho$$



Torção para eixos com diferentes materiais – Exemplo 5.9

Um eixo circular é feito pela compressão de um tubo de alumínio em uma barra de latão, para formar uma seção de dois materiais, que então agem como uma unidade. (a) Se, devido à aplicação de um torque T , aparecer uma tensão de cisalhamento de 7 kgf/mm^2 nas fibras externas do eixo, qual é a magnitude do torque T ? (b) Se o eixo tem 1 m de comprimento, qual será o ângulo de torção devido ao torque T ? Para o alumínio $E=7 \times 10^3 \text{ kgf/mm}^2$, $G=2,8 \times 10^3 \text{ kgf/mm}^2$ e para o latão $E=11,2 \times 10^3 \text{ kgf/mm}^2$, $G=4,28 \times 10^3 \text{ kgf/mm}^2$.





Torção para eixos com diferentes materiais – Exemplo 5.9

A rigidez equivalente em torção para o eixo em questão é:

$$\langle GJ \rangle = G_{\text{lat}} \cdot J_{\text{lat}} + G_{\text{al}} \cdot J_{\text{al}} = 4,2 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi \cdot 150^4}{32} + 2,8 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi}{32} (250^4 - 150^4)$$
$$\langle GJ \rangle = 1,14 \cdot 10^{12} \text{ kgf/mm}^2$$

A máxima tensão no alumínio é:

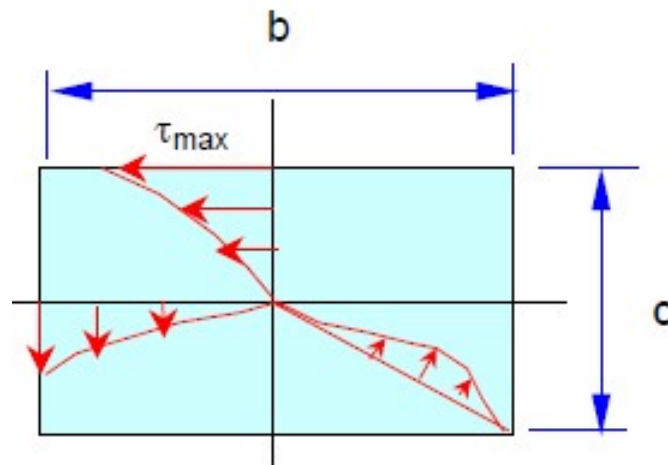
$$\tau_{\text{al}} = G_{\text{al}} \frac{T}{\langle GJ \rangle} \rho, \quad 7 = 2,8 \cdot 10^3 \frac{T}{1,14 \cdot 10^{12}} 125, \quad T = 22,8 \cdot 10^6 \text{ kgf.mm}$$

O ângulo de torção do eixo pode ser determinado por uma expressão semelhante àquela para eixos em um único material, eq. (5.11).

$$\varphi = \frac{T \cdot L}{\langle GJ \rangle} = \frac{22,8 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^3}{1,14 \cdot 10^{12}}, \quad \varphi = 0,02 \text{ rad}$$

5.8 – Membros maciços não circulares

As premissas enunciadas anteriormente para eixos de seção circular não se aplicam para este caso.



As expressões para determinar a máxima tensão e o ângulo de torção em eixos de seção retangular são como seguem:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha b c^2}$$

$$\varphi = \frac{T L}{\beta b c^3 G}$$

5.8 – Membros maciços não circulares

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha b c^2} \quad \varphi = \frac{T L}{\beta b c^3 G}$$

onde os coeficientes α e β são determinados pela relação entre os lados do retângulo:

b/c	1,0	1,5	2,0	3,0	6,0	10,0	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,267	0,299	0,312	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,263	0,299	0,312	0,333



Importante! Lista de Exercícios

Como reforço do aprendizado do conteúdo apresentado em sala de aula, são sugeridos os exercícios dispostos na lista abaixo. Bom estudo!

FERDINAND, P. B.; JOHNSTON JR, E. R; Resistência dos Materiais, Mc Graw-Hill

Resistência dos Materiais						
Capítulo						

Capítulo 6 – TENSÃO DE FLEXÃO EM VIGAS

- ≡ 6.1 – Premissa cinemática básica
- ≡ 6.2 – Fórmula da flexão elástica
- ≡ 6.3 – Centróide de área
- ≡ 6.4 – Momento de inércia de área
- ≡ 6.5 – Flexão pura de vigas com seção assimétrica
- ≡ 6.6 – Tensão de flexão em vigas com diferentes materiais (Método da rigidez equivalente)

6.1 – Premissa cinemática básica

Hipótese fundamental da teoria da flexão: As seções planas de uma viga, tomadas normalmente a seu eixo, permanecem planas após a viga ser submetida à flexão. Hipótese válida quando o material se comporta elasticamente ou plasticamente, desde que a relação espessura/comprimento da viga seja pequena.

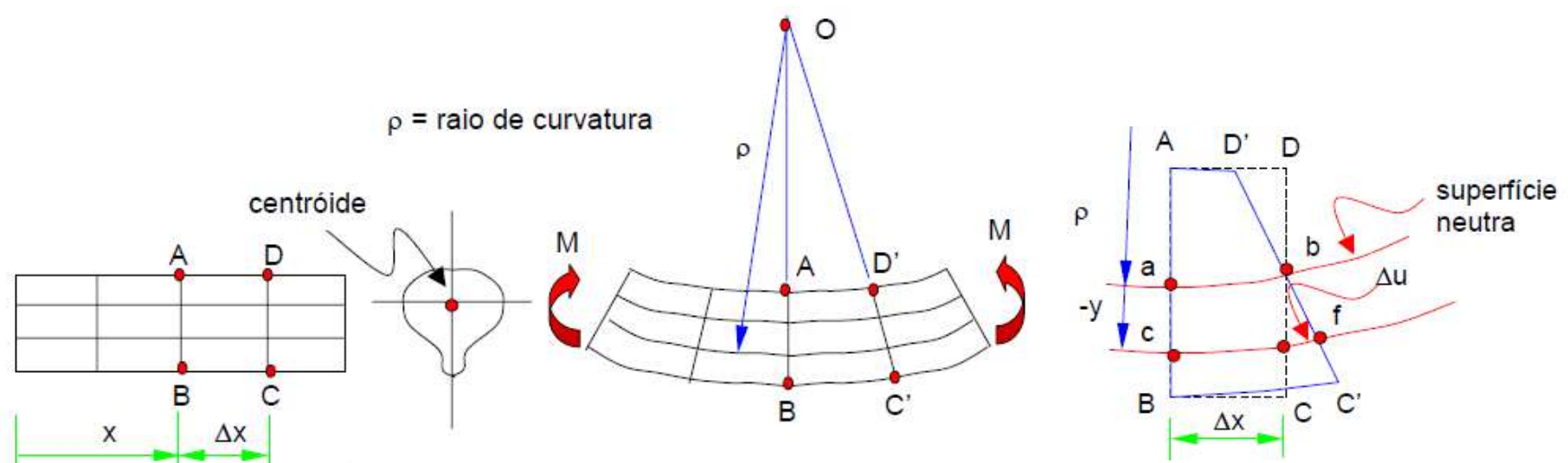


Figura 6.1 – Viga submetida à uma flexão pura

6.1 – Premissa cinemática básica

A expressão de deformação linear num ponto qualquer da viga é definida da forma:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

Da hipótese de que as seções permanecem planas depois de deformadas, observa-se que a deformação evolui de forma linear ao longo da espessura da viga, onde ε_{\max} é a máxima deformação que ocorre no ponto mais distante da superfície neutra, c . Dessa forma, a deformação em um ponto genérico, distante y da superfície neutra é da forma:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} \frac{y}{c}$$

6.2 – Fórmula da flexão elástica

Considerando o material trabalhando dentro da região elástico-linear, a Lei de Hooke, $\sigma = E \varepsilon$, se aplica. Logo:

$$\sigma_x = E \frac{\varepsilon_{\max}}{c} y = \frac{\sigma_{\max}}{c} y$$

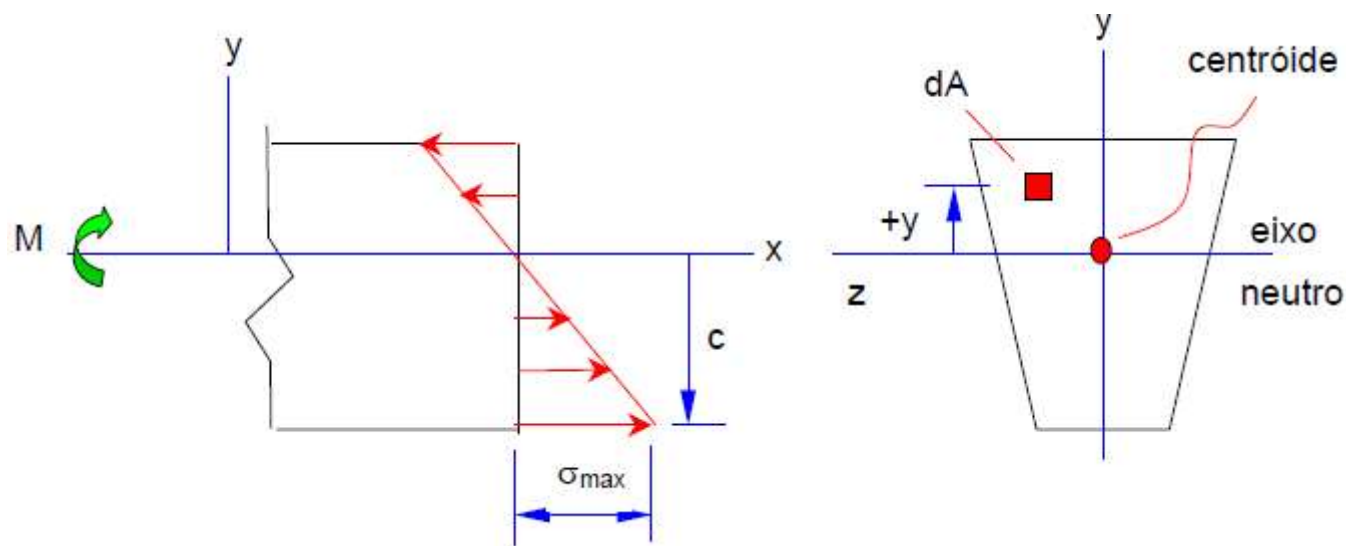


Figura 6.2 – Distribuição das tensões de flexão numa viga

6.2 – Fórmula da flexão elástica

Impondo o equilíbrio de forças na direção x, temos:

$$\rightarrow \sum F_x = 0, \int_A \sigma_x dA = 0$$

Substituindo a eq. (6.3) na eq. (6.4), temos:

$$\sigma_x = E \frac{\epsilon_{\max}}{c} y = \frac{\sigma_{\max}}{c} y \quad \int_A \frac{\sigma_{\max}}{c} y dA = 0$$

Como σ_{\max} e c são valores constantes e não nulos:

$$\int_A y dA = 0$$

De acordo com a equação para determinar a posição do centróide...

$$\bar{y} = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} = 0$$

conclui-se que o eixo neutro passa pelo centróide da seção transversal da viga.

6.2 – Fórmula da flexão elástica

O momento interno atuante na seção transversal é a soma dos momentos infinitesimais atuantes nas área dA . Assim, temos

$$M = \int_A \sigma_x dA y$$

Substituindo a eq. (6.3) na eq. (6.7):

$$\sigma_x = E \frac{\varepsilon_{\max}}{c} y = \frac{\sigma_{\max}}{c} y$$

$$M = \int_A \frac{\sigma_{\max}}{c} y^2 dA$$

O momento de inércia da seção transversal, I , em relação ao eixo que passa seu centróide é definido como:

$$I = \int_A y^2 dA$$

Das eqs. (6.8) e (6.9), é possível obter a expressão da máxima tensão de flexão:

$$\sigma_{\max} = \frac{M c}{I}$$

6.2 – Fórmula da flexão elástica

Substituindo a eq. (6.10) na eq. (6.3), obtém-se a expressão genérica de tensão de flexão em vigas em um ponto distante y da superfície neutra:

$$\sigma_{\max} = \frac{M c}{I} \longrightarrow \sigma_x = E \frac{\epsilon_{\max}}{c} y = \frac{\sigma_{\max}}{c} y \longrightarrow \sigma_x = -\frac{M y}{I}$$

A eq. (6.11) é análoga a eq. (5.5) usada para determinar a tensão de cisalhamento um ponto qualquer de um eixo de seção circular. O sinal negativo surge na eq. (6.11) pois:

Para y positivo \Rightarrow Tensão de compressão

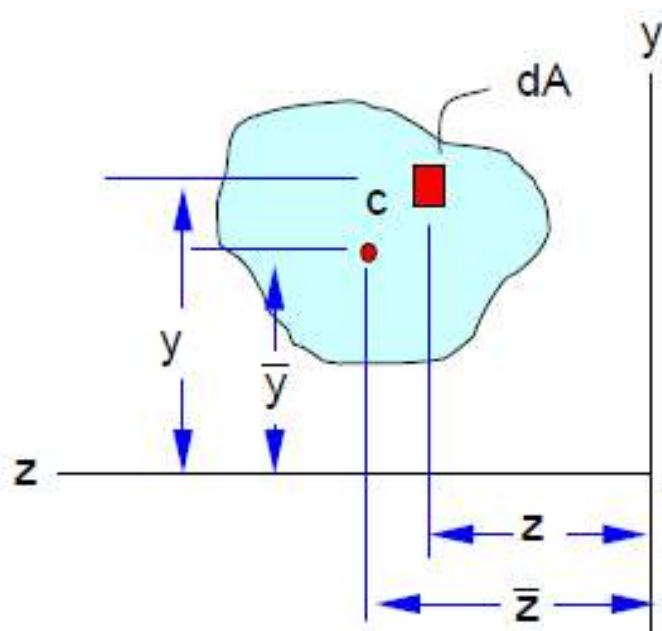
Para y negativo \Rightarrow Tensão de tração



momento positivo

6.3 – Centróide de área

Considere uma seção transversal qualquer de área A cujo centróide está posicionado em c de coordenadas y e z com relação aos eixos de referência y e z :



As expressões para determinar a posição do centróide de uma seção transversal são:

$$\bar{y} = \frac{\int_A y \, dA}{\int_A dA} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{\int_A z \, dA}{\int_A dA}$$

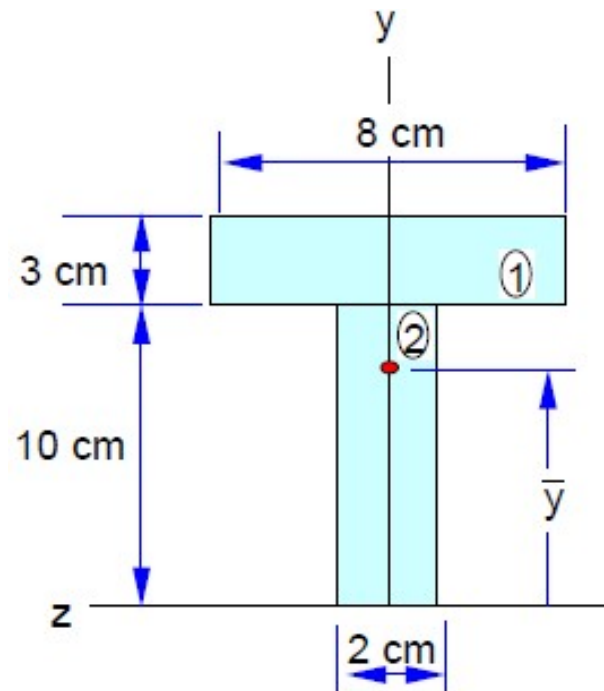
onde as integrais $\int_A y \, dA$ e $\int_A z \, dA$ são chamadas de primeiros momentos de área com relação aos eixos z e y , respectivamente.

Figura 6.3 – Posição do centróide de seção transversal



Centróide de área – Exemplo 6.1

Determine a posição do centróide da seção transversal do tipo T abaixo.

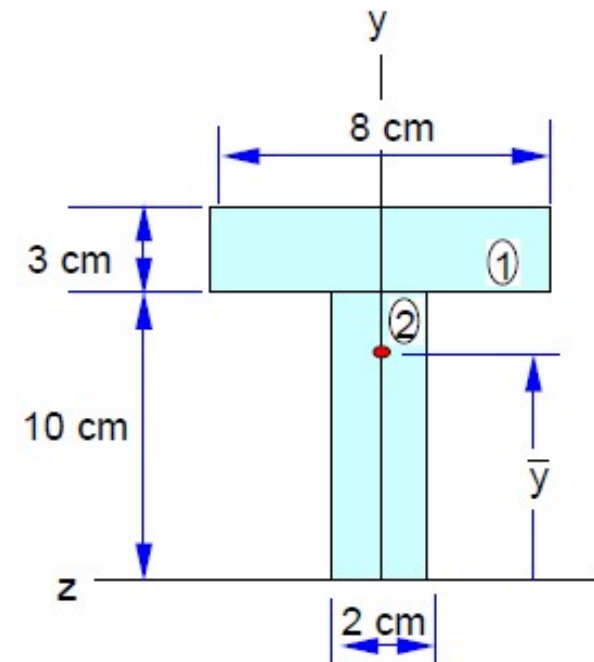




Centróide de área – Exemplo 6.1

A seção do tipo T é por duas seções retangulares, logo as integrais podem ser substituídas por somatórios. Logo:

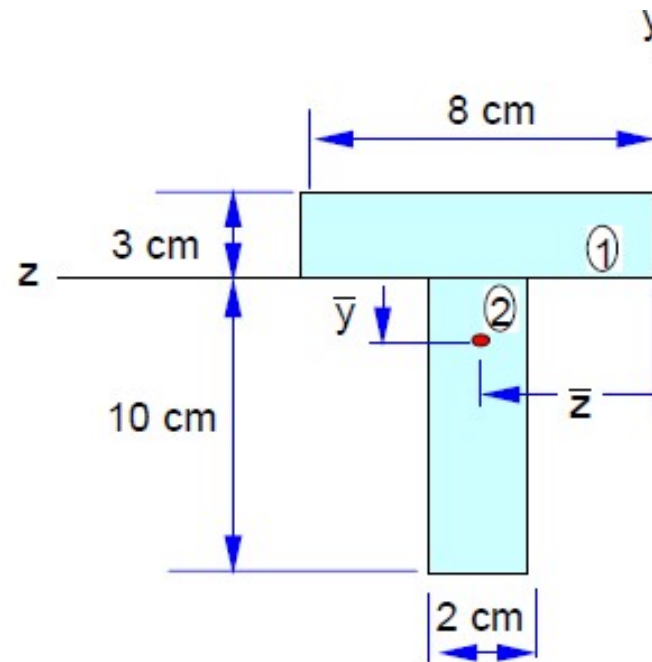
$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^2 z_i A_i}{\sum_{i=1}^2 A_i}, \quad \bar{z} = \frac{0 \cdot (8.3) + 0 \cdot (2.10)}{8.3 + 2.10} = 0 \text{ cm}$$
$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^2 y_i A_i}{\sum_{i=1}^2 A_i}, \quad \bar{y} = \frac{(10 + 1,5) \cdot (8.3) + 5 \cdot (2.10)}{8.3 + 2.10} = 8,55 \text{ cm}$$





Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Centróide de área – **Exemplo 6.2**

Determine a posição do centróide da seção transversal do exemplo anterior, onde neste caso, os eixos de referência são posicionados de forma diferente.

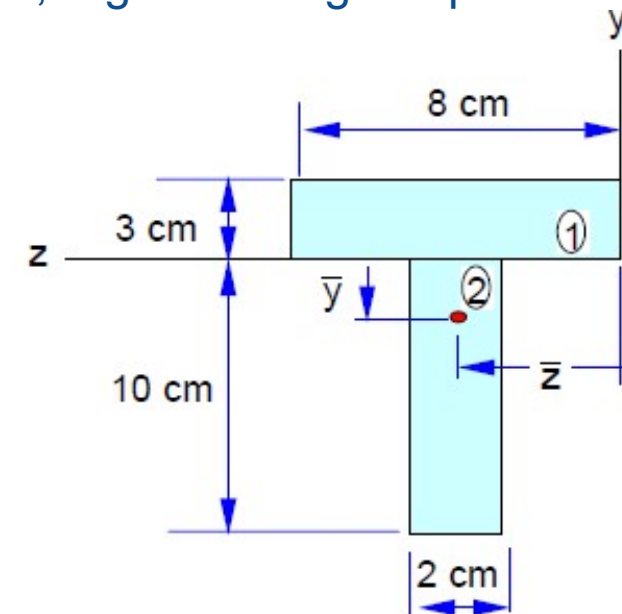




Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Centróide de área – **Exemplo 6.2**

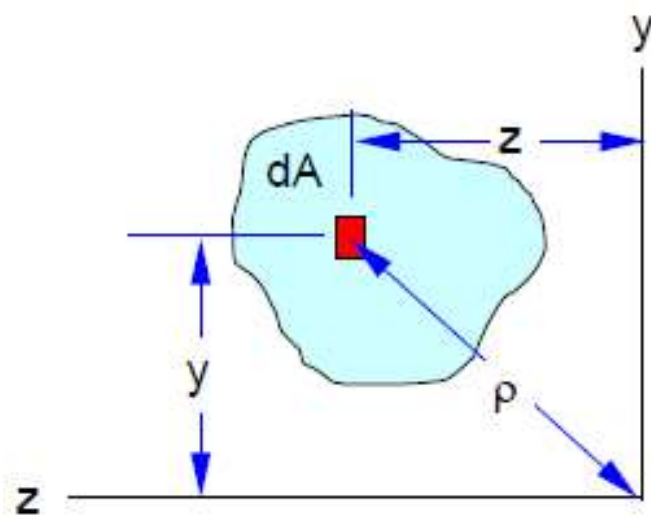
A seção do tipo T é por duas seções retangulares, logo as integrais podem ser substituídas por somatórios. Logo:

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^2 z_i A_i}{\sum_{i=1}^2 A_i}, \quad \bar{z} = \frac{4 \cdot (8 \cdot 3) + 4 \cdot (2 \cdot 10)}{8 \cdot 3 + 2 \cdot 10} = 4 \text{ cm}$$
$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^2 y_i A_i}{\sum_{i=1}^2 A_i}, \quad \bar{y} = \frac{1,5 \cdot (8 \cdot 3) + (-5) \cdot (2 \cdot 10)}{8 \cdot 3 + 2 \cdot 10} = -1,45 \text{ cm}$$



6.4 – Momento de inércia de área

Considere os eixos y e z sobre os quais deseja-se determinar os momentos de inércia da área A :



Os momentos de inércia da área A com relação aos eixos y , z e são determinados da seguinte forma:

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

$$J = \int_A \rho^2 dA = I_z + I_y$$

Os eixos z e y são chamados de eixos principais de inércia quando passam pelo centróide da seção. Neste caso:

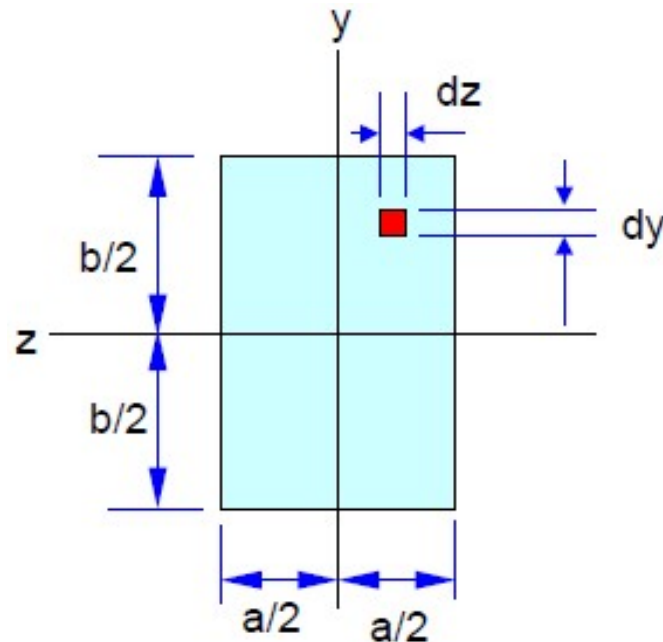
$$I_{yz} = \int_A y z dA = 0$$

Figura 6.4 – Momentos de inércia de área



Momento de inércia de área – Exemplo 6.3

Determine os momentos de inércia da seção transversal retangular de dimensões a e b mostrada abaixo.





Momento de inércia de área – Exemplo 6.3

$$I_z = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy dz = z \left|_{-a/2}^{a/2} \frac{y^3}{3} \right|_{-b/2}^{b/2}$$

$$I_z = \frac{a b^3}{12}$$

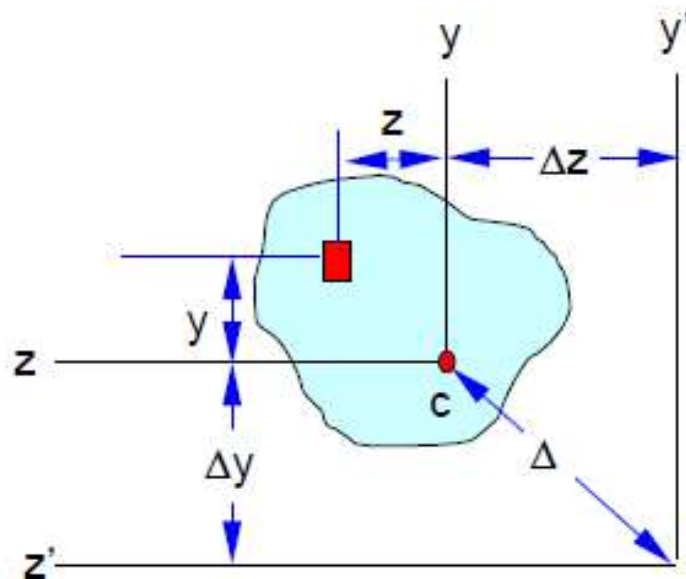
De maneira análoga: $I_y = \frac{b a^3}{12}$

Como os eixos y e z passam pelo centróide da seção, tem-se que:

$$I_{yz} = \int_{-b/2}^{b/2} y dy \int_{-a/2}^{a/2} z dz = \frac{y^2}{2} \Big|_{-b/2}^{b/2} \frac{z^2}{2} \Big|_{-a/2}^{a/2} = 0$$

6.4 – Momento de inércia de área

Os momentos de inércia de uma seção com relação à eixos paralelos aos eixos principais de inércia podem ser determinados pelo **teorema dos eixos paralelos**:



As expressões para determinar a Da definição de momento de inércia de área dada pela eq. (6.13), o momento de inércia da seção com relação ao eixo z' é:

$$I_{z'} = \int_A (y + \Delta y)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2 \Delta y \int_A y dA + \Delta y^2 \int_A dA$$

Figura 6.5 – Momentos de inércia de área com relação à eixos paralelos

6.4 – Momento de inércia de área

Da definição de momento de inércia de área dada pela eq. (6.13), o momento de inércia da seção com relação ao eixo z' é:

$$I_{z'} = \int_A (y + \Delta y)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2 \Delta y \int_A y dA + \Delta y^2 \int_A dA$$

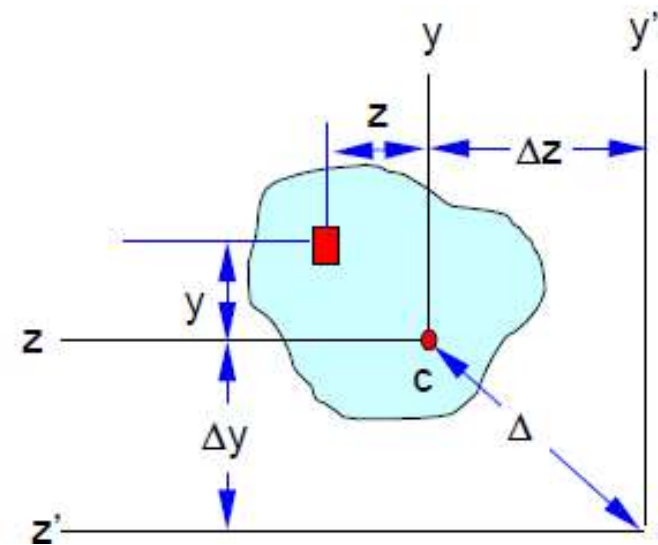
Considerando a eq. (6.6), a expressão final do momento de inércia da seção transversal de área A **com relação ao eixo paralelo z'** é:

$$I_{z'} = I_z + \Delta y^2 A$$

Por analogia, os momentos de inércia com relação aos eixos y' e x' são:

$$I_{y'} = I_y + \Delta z^2 A$$

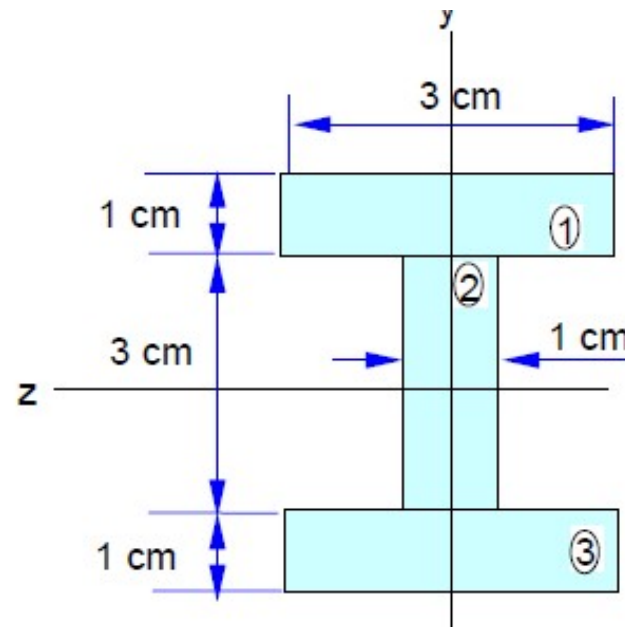
$$J_0 = J_C + \Delta^2 A$$





Momento de inércia de área com relação a um eixo qualquer – **Exemplo 6.4**

Determine o momento de inércia da seção do tipo I com relação aos eixos y e z como mostrado abaixo.





Momento de inércia de área com relação a um eixo qualquer – **Exemplo 6.4**

O momento de inércia da seção com relação ao eixo z pode ser determinado considerando a soma dos momentos de inércia das áreas retangulares que formam a seção do tipo I. Logo:

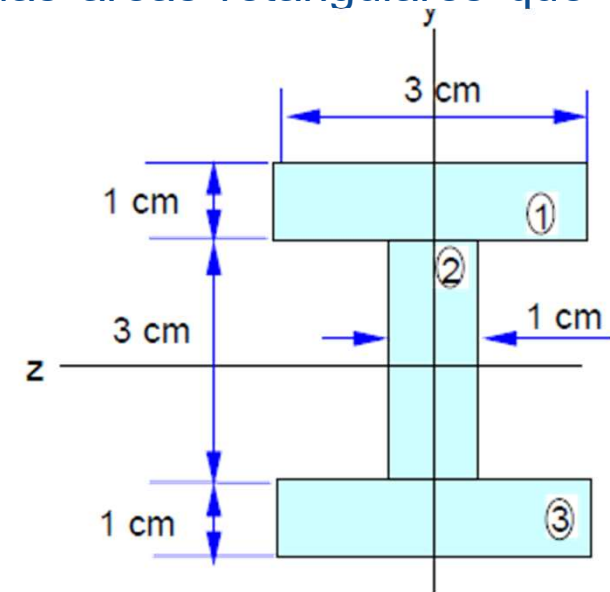
$$I_z = I_{z1} + I_{z2} + I_{z3}$$

$$I_{z1} = \frac{3 \cdot 1^3}{12} + 1 \cdot 3 \cdot 2^2, \quad I_{z1} = 12,25 \text{ cm}^4$$

$$I_{z2} = \frac{1 \cdot 3^3}{12}, \quad I_{z2} = 2,25 \text{ cm}^4$$

$$I_{z3} = \frac{3 \cdot 1^3}{12} + 1 \cdot 3 \cdot 2^2, \quad I_{z3} = 12,25 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 26,75 \text{ cm}^4$$





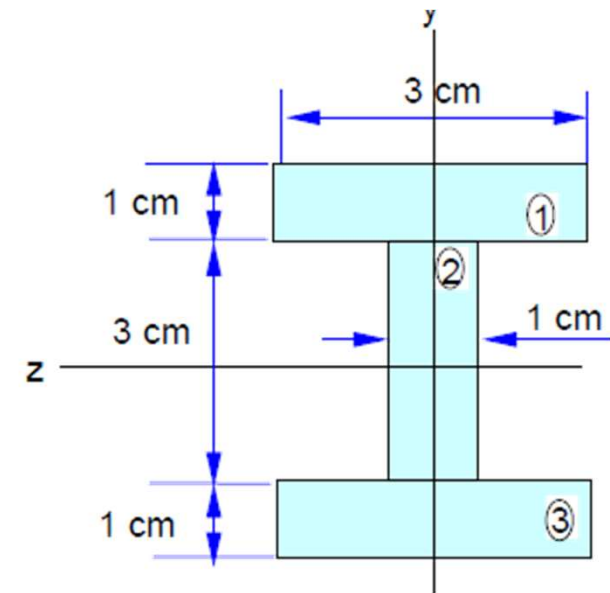
Momento de inércia de área com relação a um eixo qualquer – **Exemplo 6.4**

...e, o **momento de inércia da seção com relação ao eixo y** é:

$$I_y = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3}$$

$$I_y = \frac{1 \cdot 3^3}{12} + \frac{3 \cdot 1^3}{12} + \frac{1 \cdot 3^3}{12}$$

$$I_y = 4,75 \text{ cm}^4$$



Importante: O momento de inércia representa a resistência de uma seção transversal em girar em torno de um eixo. Portanto, a seção acima gira mais facilmente em torno do eixo y que do eixo z.

6.5 – Flexão pura de vigas com seção assimétrica

Na discussão anterior, foram analisadas somente vigas com seções transversais simétricas, porém o equacionamento é válido para **seções quaisquer**, desde que seus eixos sejam os eixos principais de inércia.

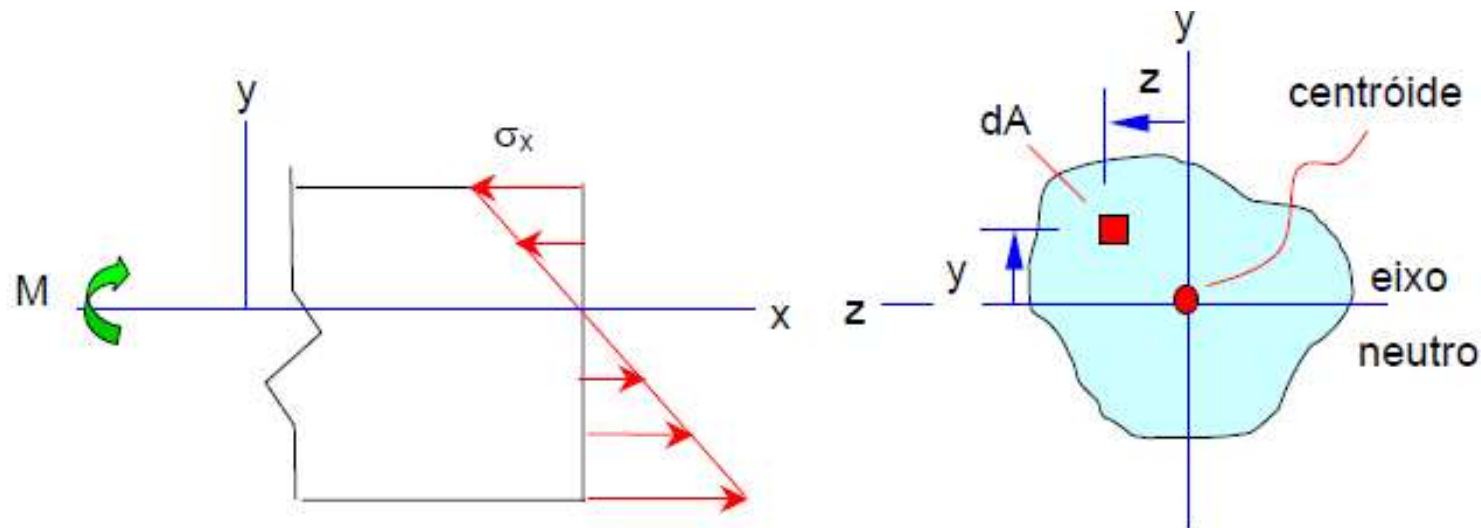


Figura 6.6 – Flexão de vigas assimétricas

6.5 – Flexão pura de vigas com seção assimétrica

Impondo o equilíbrio de momentos com relação ao eixo y , temos:

$$M_y = \int_A \sigma_x z \, dA$$

onde M_y é o momento interno resultante.

Substituindo a eq. (6.3) na eq. (6.18), e considerando que σ_{\max} e c são constantes:

$$\sigma_x = E \frac{\varepsilon_{\max}}{c} y = \frac{\sigma_{\max}}{c} y$$

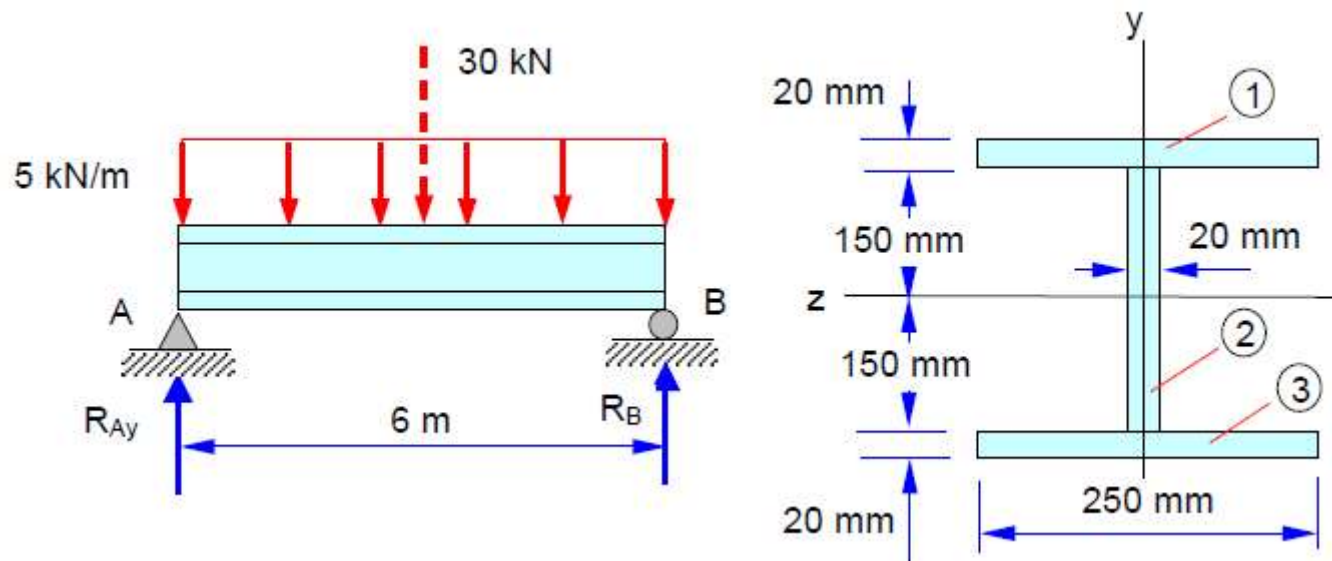
$$M_y = \frac{\sigma_{\max}}{c} \int_A y z \, dA$$

Se y e z são eixos principais de inércia, a integral $\int_A yz \, dA$ é nula, eq.(6.14). Logo, o momento interno resultante $M_y=0$. Assim, as equações deduzidas anteriormente se aplicam à uma viga de seção transversal qualquer.



Flexão pura de vigas com seção assimétrica – Exemplo 6.5

Determine a tensão de flexão máxima na viga de seção do tipo I submetida à um carregamento distribuído como mostrado abaixo:





Flexão pura de vigas com seção assimétrica – Exemplo 6.5

a – Cálculo das reações de apoio:

$$\sum M_B = 0, \quad R_A \cdot 6 - 30 \cdot 3 = 0, \quad R_A = 15 \text{ kN}$$

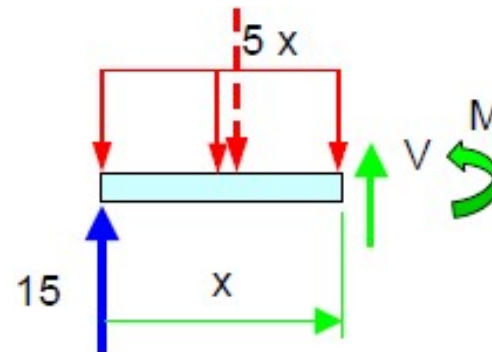
b – Cálculo do momento máximo

$$\sum M = 0, \quad -15x + 5x \frac{x}{2} + M = 0$$

$$M = -\frac{5}{2}x^2 + 15x \quad (\text{kN.m})$$

$$M_{\max}: \frac{dM}{dx} = 0 = -5x + 15 \Rightarrow x = 3 \text{ m}$$

$$M_{\max (x=3)} = 22,5 \text{ kN.m}$$





Flexão pura de vigas com seção assimétrica – Exemplo 6.5

c – Cálculo do momento de inércia da seção:

$$I_z = I_{z1} + I_{z2} + I_{z3}$$

$$I_z = 2 \left[\frac{250 \cdot 20^3}{12} + 250 \cdot 20 \cdot 160^2 \right] + \left[\frac{20 \cdot 300^3}{12} \right]$$

$$I_z = 301,3 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

d – Cálculo da máxima tensão de flexão

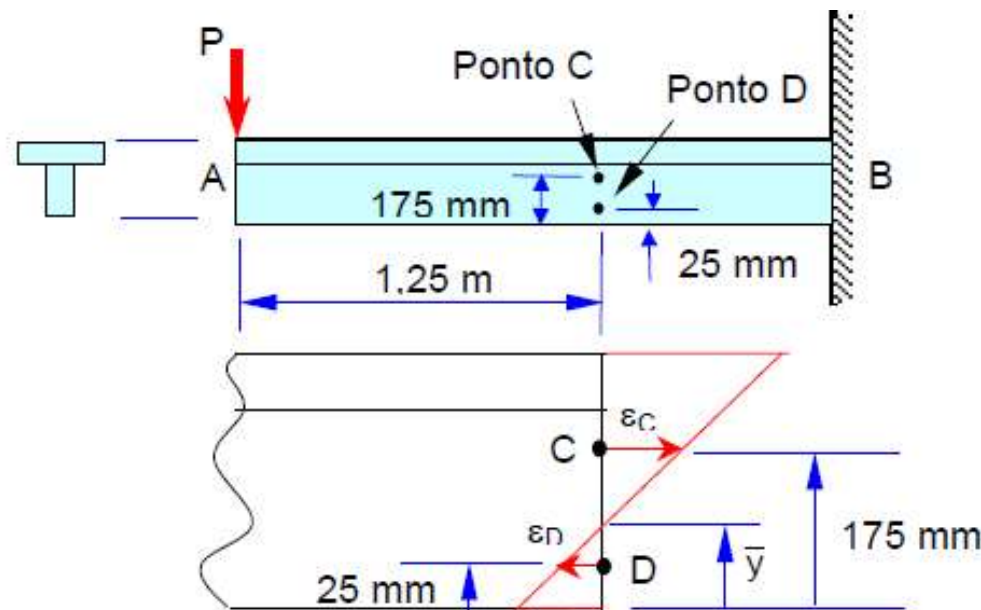
$$\sigma_{\max} = -\frac{M_{\max} \cdot c}{I_z} = -\frac{22,5 \cdot 10^6 \cdot (-170)}{301,3 \cdot 10^6}$$

$$\sigma_{\max} = 12,7 \text{ MPa}$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Flexão pura de vigas com seção assimétrica – Exemplo 6.6

Uma viga estrutural em aço do tipo T usada em balanço, é carregada da forma mostrada na figura. Calcular a magnitude da carga P que provoca uma deformação longitudinal no ponto C de $+527 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$ (alongamento) e uma deformação longitudinal no ponto D de $-73 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$ (encurtamento). ($I = 2000 \text{ cm}^4$ e $E_{\text{aço}} = 21 \times 10^3 \text{ kgf/mm}^2$).



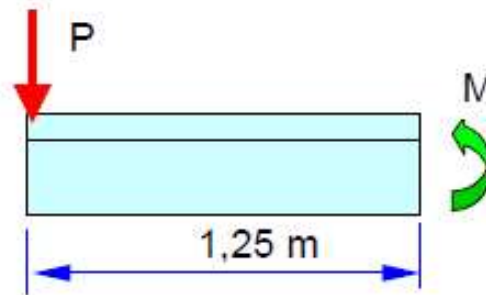


Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala)

Flexão pura de vigas com seção assimétrica – Exemplo 6.6

Por semelhança de triângulos:

$$\frac{\varepsilon_C}{175 - \bar{y}} = \frac{\varepsilon_D}{\bar{y} - 25} \Rightarrow \bar{y} = 43,25 \text{ mm}$$



$$\sum M = 0, \quad M + P \cdot 1,5 = 0, \quad M = -1,5 P \text{ (kgf} \cdot \text{m)}$$

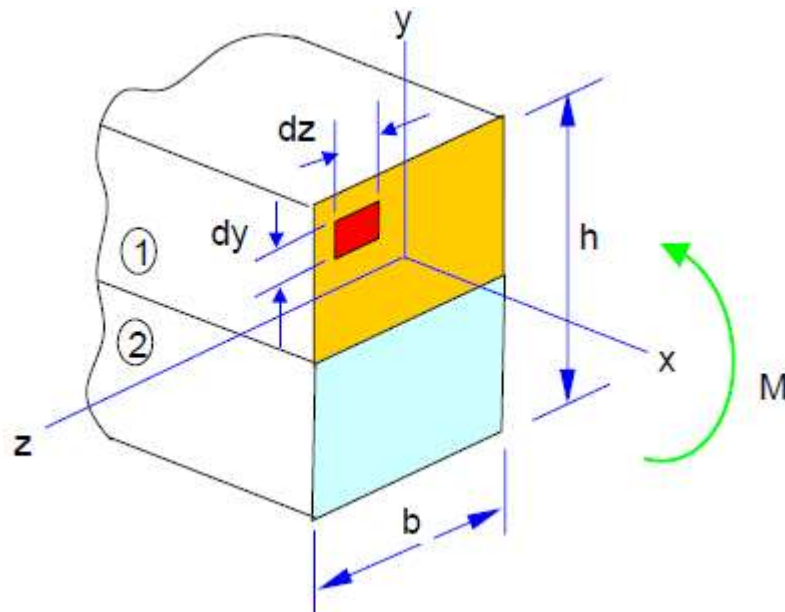
$$\sigma_C = -\frac{M \cdot y_C}{I} = E \cdot \varepsilon_C$$

$$\frac{P \cdot 1,25 \cdot 10^3 \cdot (175 - 43,25)}{2000 \cdot 10^4} = 21 \cdot 10^3 \cdot 527 \cdot 10^{-6}$$

$$P = 1344 \text{ kgf}$$

6.6 – Tensão de flexão em vigas com diferentes materiais (Método da rigidez equivalente)

Vigas com dois materiais são comumente chamadas de vigas compostas e são projetadas de forma a desenvolver maneiras mais eficientes para resistir às cargas aplicadas.



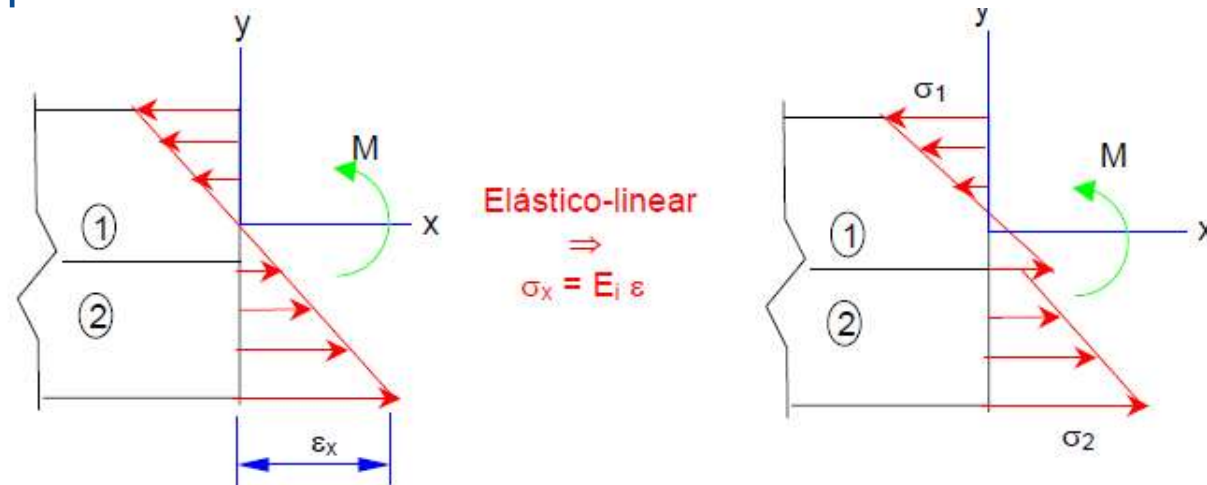
Como a fórmula da flexão em vigas, foi desenvolvida para o caso de materiais homogêneos, esta fórmula não pode ser aplicada diretamente para determinar as tensões de flexão em vigas compostas por diferentes materiais.

Para estudar estes casos de viga, considere uma viga composta de dois diferentes materiais.

Figura 6.7 – Flexão de vigas compostas

6.6 – Tensão de flexão em vigas com diferentes materiais (Método da rigidez equivalente)

Supondo que $E_1 > E_2$:



Impondo o equilíbrio estático das forças na direção x , obtém-se a mesma eq. (6.3). Supondo que a lei de Hooke é válida para cada material i , e pode ser colocada da forma:

$$\sigma_i = E_i \varepsilon$$

onde σ_i é a tensão num ponto situado no material i e E_i é o módulo de elasticidade do material i .

6.6 – Tensão de flexão em vigas com diferentes materiais (Método da rigidez equivalente)

Sabendo que a evolução das deformações é da forma pela eq. (6.2), o equilíbrio estático se põe da forma:

$$\frac{\varepsilon_{\max}}{c} \int_A E_i y \, dA = 0$$

Seguindo o mesmo raciocínio feito na eq. (6.6) para no caso de uma viga homogênea, a eq. (6.21) pode usada para determinar a posição do eixo neutro (centróide) da seção transversal com diferentes materiais da seguinte maneira:

$$\bar{y} = \frac{\int_A E_i y \, dA}{\int_A E_i \, dA} = \frac{\sum E_i y_i A_i}{\sum E_i A_i}$$

onde y_i é o centróide da área de material i e A_i é a área de material i .

6.6 – Tensão de flexão em vigas com diferentes materiais (Método da rigidez equivalente)

O momento interno é obtido pela soma dos momentos infinitesimais. Assim, considerando as eqs. (6.2) e (6.20), temos:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} \frac{y}{c} \longrightarrow \sigma_i = E_i \varepsilon \longrightarrow M = \frac{\varepsilon_{\max}}{c} \int_A E_i y^2 dA$$

A integral da eq. (6.23) pode ser chamada de rigidez equivalente em flexão, $\langle EI \rangle$:

$$\langle EI \rangle = \int_A E_i y^2 dA = \sum E_i I_i$$

onde I_i é o momento de inércia da área com material i .

6.6 – Tensão de flexão em vigas com diferentes materiais (Método da rigidez equivalente)

Substituindo a eq. (6.24) na eq. (6.23) e rearranjando, a expressão da máxima deformação pode ser colocada da forma:

$$\langle EI \rangle = \int_A E_i y^2 dA = \sum E_i I_i \longrightarrow M = \frac{\varepsilon_{\max}}{c} \int_A E_i y^2 dA$$

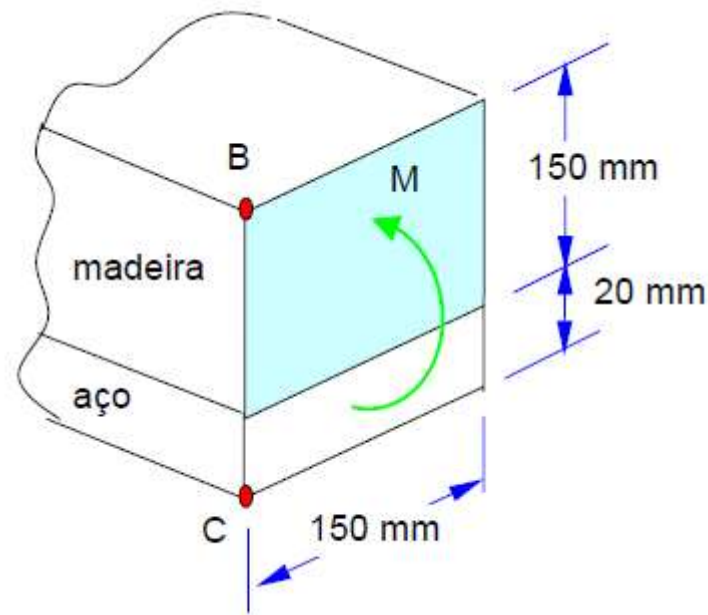
Considerando a relação de deformação dada pela eq. (6.2) e a lei de Hooke para cada material i , eq. (6.20), a expressão que fornece a tensão de flexão em um material i , distante y do eixo neutro é da forma:

$$\sigma_i = -E_i \frac{M}{\langle EI \rangle} y$$



Tensão de flexão em vigas com diferentes materiais (Método da rigidez equivalente) – Exemplo 6.7

A viga composta abaixo é sujeita à um momento fletor de $M=2\text{kN.m}$. Determine pelo método da rigidez equivalente as tensões nos pontos B e C se $E_{\text{aço}}=200\text{GPa}$ e $E_{\text{mad}}=12\text{GPa}$.





Tensão de flexão em vigas com diferentes materiais (Método da rigidez equivalente) – Exemplo 6.7

a - Determinar a posição do centróide y :

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^2 E_i y_i A_i}{\sum_{i=1}^2 E_i A_i} = \frac{12 \cdot 10^9 \cdot 95 \cdot 150 \cdot 150 + 200 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 150}{12 \cdot 10^9 \cdot 150 \cdot 150 + 200 \cdot 10^9 \cdot 20 \cdot 150}, \quad \bar{y} = 36,38 \text{ mm}$$

b - Determinar a rigidez equivalente $\langle EI \rangle$:

$$\langle EI \rangle = 12 \cdot 10^3 \left[\frac{150 \cdot 150^3}{12} + 150 \cdot 150 \cdot \left(\frac{150}{2} + 20 - 36,38 \right)^2 \right] + 200 \cdot 10^3 \left[\frac{150 \cdot 20^3}{12} + 20 \cdot 150 \cdot (36,38 - 10)^2 \right]$$

$$\langle EI \rangle = 1,87 \cdot 10^{12} \text{ N.mm}^2$$



Flexão pura de vigas com seção assimétrica – Exemplo 6.5

c - Determinar as tensões:

Ponto C:

$$\sigma_C = -E_{\text{aço}} \frac{M}{\langle EI \rangle} y_C = -200.10^3 \frac{.2000.10^3 (-36,38)}{1,87.10^{12}}$$

$$\sigma_C = 7,78 \text{ N/mm}^2 = 7,78 \text{ Mpa}$$

Ponto B:

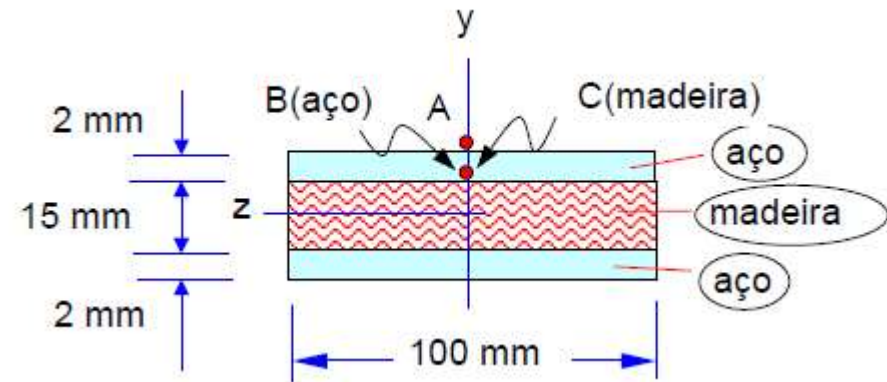
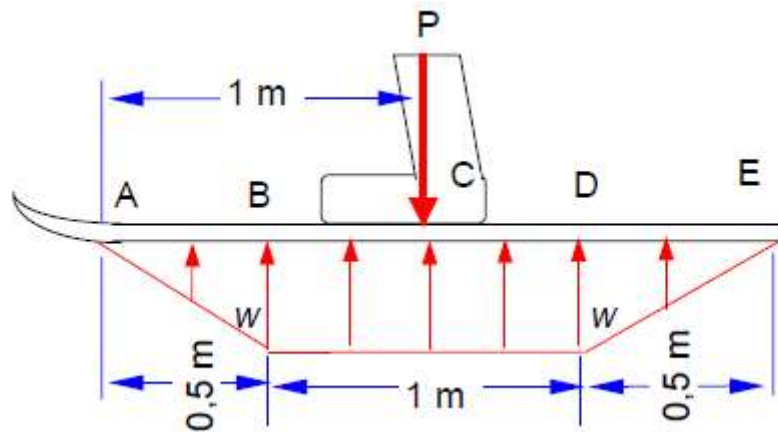
$$\sigma_B = -E_{\text{mad}} \frac{M}{\langle EI \rangle} y_B = -12.10^3 \frac{.2000.10^3 (150 + 20 - 36,38)}{1,87.10^{12}}$$

$$\sigma_B = -1,71 \text{ Mpa}$$



Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Tensão de flexão em vigas com diferentes materiais – Exemplo 6.8

Se o momento máximo no ski abaixo é 77,78N.m, determine as tensões de flexão no aço e na madeira se a seção transversal do ski é como apresentado abaixo. Tome $E_{\text{aço}}=200\text{GPa}$ e $E_{\text{mad}}=12\text{GPa}$.)





Estudo Dirigido - Atividade em grupo (em sala) Tensão de flexão em vigas com diferentes materiais – **Exemplo 6.8**

a – Cálculo da rigidez equivalente $\langle EI \rangle$:

$$\langle EI \rangle = 2 E_{\text{aço}} \left[\frac{100 \cdot 2^3}{12} + 2 \cdot 100 \cdot \left(\frac{15}{2} + \frac{2}{2} \right)^2 \right] + E_{\text{mad}} \left[\frac{100 \cdot 15^3}{12} \right]$$

$$\langle EI \rangle = 2 \cdot 200 \cdot 10^3 \left[\frac{100 \cdot 2^3}{12} + 2 \cdot 100 \cdot \left(\frac{15}{2} + \frac{2}{2} \right)^2 \right] + 12 \cdot 10^3 \left[\frac{100 \cdot 15^3}{12} \right]$$

$$\langle EI \rangle = 6,14 \cdot 10^9 \text{ N.mm}^2$$

b – Cálculo das tensões:

Ponto A (aço): $\sigma_A = -E_{\text{aço}} \frac{M}{\langle EI \rangle} y_A = -200 \cdot 10^3 \frac{77,78 \cdot 10^3 \cdot 9,5}{6,14 \cdot 10^9}, \quad \sigma_A = -24,05 \text{ Mpa}$

Ponto B (aço): $\sigma_B = -E_{\text{aço}} \frac{M}{\langle EI \rangle} y_B = -200 \cdot 10^3 \frac{77,78 \cdot 10^3 \cdot 7,5}{6,14 \cdot 10^9}, \quad \sigma_B = -18,99 \text{ Mpa}$

Ponto C (madeira): $\sigma_C = -E_{\text{mad}} \frac{M}{\langle EI \rangle} y_C = -12 \cdot 10^3 \frac{77,78 \cdot 10^3 \cdot 7,5}{6,14 \cdot 10^9}, \quad \sigma_C = -1,14 \text{ Mpa}$



Importante! Lista de Exercícios

Como reforço do aprendizado do conteúdo apresentado em sala de aula, são sugeridos os exercícios dispostos na lista abaixo. Bom estudo!

FERDINAND, P. B.; JOHNSTON JR, E. R; Resistência dos Materiais, Mc Graw-Hill

Resistência dos Materiais						
Capítulo						

Perguntas?

Contato:



<http://lattes.cnpq.br/9510794972870727>



[@carloscatunda](#)



carlos.catunda@cefet-rj.br

